



Sur les bassins d'attraction de *patterns* dans des systèmes de réaction-diffusion oscillants*

Benjamin Ambrosio[†], M. A. Aziz-Alaoui[†]

Résumé. Dans cet article, on s'intéresse à la caractérisation des bassins d'attraction de solutions présentant des motifs (*patterns*) pour des systèmes de réaction-diffusion symétriques et dont la partie réactive est oscillante. On met en évidence un sous-ensemble de conditions initiales qui ne peuvent pas évoluer asymptotiquement vers des solutions homogènes en espace. On étend ensuite ces résultats à des solutions dont les conditions initiales sont choisies de manière stochastique. ©EDP-Normandie. Tous droits réservés.

Mots-clés. Réaction-diffusion ; FitzHugh-Nagumo ; Cycles-limites ; Formation de *patterns*.

Abstract. We focus on the characterization of pattern solutions of Reaction Diffusion systems with symmetry and oscillatory reaction part. We characterize some subset of initial conditions that cannot evolve asymptotically toward space homogeneous solutions. Then we perform some numerical simulations and exhibit some specific patterns resulting from stochastic initial conditions. ©EDP-Normandie. All rights reserved.

Keywords. Patterns ; Reaction Diffusion ; Symmetry ; FitzHugh-Nagumo ; Slow-Fast Analysis.

1. Introduction

La formation de motifs particuliers apparaît dans de nombreuses applications telles que la chimie, la mécanique des fluides, la morphogénèse, les hallucinations visuelles. L'ouvrage [5] fournit par exemple un large éventail d'applications où l'on peut observer de tels motifs. Parmi les modèles mathématiques susceptibles de reproduire ces motifs, les systèmes de réaction-diffusion tiennent une place de choix. Rappelons que les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$U_t = F(U) + K\Delta U,$$

où $U(x, t)$ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, F une application non linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, K est une matrice diagonale à coefficients positifs,

* Submitted : September 5, 2015. Accepted (in revised form) : December 23, 2015.

[†]Normandie University, France ULH, LMAH, F-76600 Le Havre, Fédération Normandie-Mathématiques, Université du Havre, LMAH.
benjamin.ambrosio@univ-lehavre.fr, aziz.alaoui@univ-lehavre.fr

et $U_t = \frac{\partial U}{\partial t}$. Parmi les travaux fondateurs de l'analyse des patterns dans les systèmes de réaction-diffusion, le plus célèbre aujourd'hui est sans doute l'article de A. Turing [9]. Dans ce travail un système de réaction-diffusion à deux équations est proposé pour expliquer la morphogénèse. Mathématiquement, le phénomène connu aujourd'hui sous le nom de mécanisme de Turing se produit lorsque le système sans diffusion possède une solution stationnaire stable et que la diffusion la rend instable, permettant l'apparition de motifs spatiaux stables. La technique mathématique largement utilisée, consiste à écrire des conditions suffisantes pour que l'opérateur linéarisé ait des valeurs propres positives, voir par exemple [5]. Un autre cas où l'émergence de motifs est possible, est le cas où la partie réactive est excitable ou oscillante. Des ondes peuvent alors se propager et former des motifs intéressants. Dans le contexte des systèmes excitables, la propagation d'ondes résulte de la propagation de l'excitation aux plus proches voisins via le terme de diffusion. Dans le cas d'un milieu oscillant, la propagation d'ondes résulte d'un décalage de phase des oscillations selon la position spatiale. La symétrie joue un rôle important dans la formation de motifs. On trouve cette idée déjà présente dans [9]. Depuis ce travail, une théorie conséquente a été développée pour permettre d'étudier le rôle de la symétrie dans la formation de patterns, voir [4]. Dans notre travail, on considère des systèmes de réaction-diffusion à deux équations et présentant une partie symétrique et oscillante. Plus précisément, on s'intéresse à la caractérisation de motifs pour des systèmes de réaction-diffusion dont la partie réactive a la propriété suivante : le seul point fixe est l'origine et toutes les solutions partant d'un point distinct de l'origine évoluent asymptotiquement autour d'un unique cycle-limite. On supposera également que la partie réactive possède une symétrie qui sera explicitée plus en avant. Un exemple typique de tels systèmes est fourni par le système de FitzHugh-Nagumo (FHN) suivant :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v \\ v_t &= u - \delta v \end{cases} \quad (1.1)$$

où $f(u) = -u^3 + 3u$, δ, ϵ petits. Rappelons que le système (FHN), (voir [7, 8]), résulte d'une simplification du système de Hodgkin-Huxley et qu'il permet de modéliser des phénomènes oscillatoires ou excitables. Dans le système (1.1), la variable u représente la différence de potentiel cellulaire tandis que la variable v est une variable de rappel (recovery variable). Dans la version (1.1) étudiée ici, le système est oscillant. La figure 1.1 illustre le comportement asymptotique du système (1.1).

Nous traiterons exclusivement dans cet article, le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + d_u \Delta u \\ v_t &= u - \delta v + d_v \Delta v \end{cases} \quad (1.2)$$

sur un domaine borné Ω avec des conditions aux bords de Neumann (NBC), $d_u > 0$, $d_v \geq 0$ mais certains résultats demeurent valables pour des systèmes plus généraux. On s'intéresse aux bassins d'attraction de solutions particulières de (1.2). On peut exprimer notre analyse dans différents cadres. On sait que

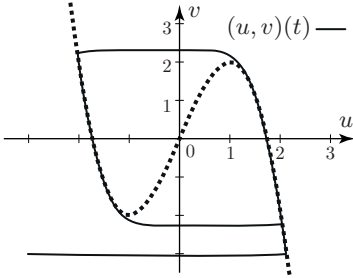


Fig. 1.1. Une solution du système (1.1). Toutes les trajectoires non égales à $(0, 0)$ évoluent asymptotiquement autour d'un unique cycle limite.

le système (1.2) génère un semi-groupe, défini pour tout temps positif, dans $\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et possède un attracteur global dans \mathcal{H} , ainsi qu'une borne dans $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, voir [1]. D'autres cadres sont possibles, ainsi on peut se placer dans les espaces de fonctions continues ou Höldériens. Dans le cas où $d_v > 0$, on a d'ailleurs un effet régularisant : même si on choisit des conditions initiales dans L^2 , on aura des solutions classiques (höldériennes) pour $t > 0$, voir [6]. On s'intéresse aux éléments de l'attracteur. Parmi eux, figurent les solutions constantes en espace, solutions du système sans diffusion (1.1). En d'autres termes, si on choisit les conditions initiales de (1.2), $(u_0(x), v_0(x))$, constantes en espace non nulles, et si (u, v) est une solution de (1.2) partant de ces conditions initiales, alors pour tout $x \in \Omega$, $(u(x, t), v(x, t))$ est une solution de (1.1) qui évolue asymptotiquement autour du cycle-limite. Cette solution est stable, et les simulations numériques montrent que la plupart des conditions initiales vont évoluer asymptotiquement vers cette solution. Dans le cas où,

$$\lambda d_u > 3, \quad (1.3)$$

où λ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec NBC, toutes les solutions évoluent asymptotiquement vers des solutions homogènes en espace, c'est à dire vers le cycle-limite de (1.1) ou vers $(0, 0)$, voir [2, 10]. Maintenant, que se passe-t-il quand la condition (1.3) n'est pas vérifiée? Peut-on caractériser des conditions initiales qui ne vont pas évoluer asymptotiquement vers des solutions homogènes en espace? Le but de cet article est de discuter cette question et fournir quelques éléments de réponses à la fois théoriques et numériques. L'article est divisé en cinq parties. Après cette introduction, on présente, dans la seconde partie, quelques résultats nouveaux concernant la stabilité de la solution périodique homogène en espace de (1.2) qui utilisent des techniques d'analyse lente-rapide. Dans la troisième partie, on donne des conditions suffisantes assurant un comportement asymptotique non homogène en espace. Pour cela on montrera comment choisir des conditions initiales permettant de conserver les intégrales $\int_{\Omega} u dx$ et $\int_{\Omega} v dx$ nulles. Cela suffit pour montrer que les solutions ne peuvent pas évoluer asymptotiquement vers le cycle-limite de (1.1). Notons que malgré les travaux importants sur les systèmes symétriques, voir [4], à notre connaissance les résultats présentés dans

cette partie et la suivante demeurent inconnus. Dans la quatrième partie, on présente des simulations numériques. Les premières simulations illustrent les résultats théoriques de la troisième partie. On illustre également numériquement d'autres conditions initiales qui évoluent asymptotiquement vers des solutions non-homogènes en espace. Ces conditions initiales, distribuées selon des lois stochastiques d'espérance nulle permettent d'obtenir des patterns moins symétriques. La conclusion figure en dernière partie.

2. Sur la stabilité de la solution périodique en temps et homogène en espace pour le système (1.2)

On énonce dans cette partie, deux propositions qui correspondent aux éléments clés de l'analyse lente-rapide de l'évolution du système (1.2) autour de la solution périodique homogène en espace. La démonstration détaillée de ces résultats se trouve dans [3] qui contient l'analyse complète de la stabilité de la solution périodique de (1.1) via les techniques lente-rapides. On note (\bar{u}, \bar{v}) la solution périodique du système (1.1). On réécrit le système (1.2) autour de (\bar{u}, \bar{v}) , cela donne :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f'(\bar{u})u + \frac{f''(\bar{u})}{2}u^2 - u^3 - v + d_u \Delta u \\ v_t &= u - \delta v + d_v \Delta v. \end{cases} \quad (2.1)$$

Selon l'analyse lente-rapide classique, le système couche-limite (layer system) s'écrit :

$$\begin{cases} u_\tau &= f'(\bar{u}(0))u + \frac{f''(\bar{u}(0))}{2}u^2 - u^3 - v + d_u \Delta u \\ v_\tau &= 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

tandis que le système réduit s'écrit :

$$\begin{cases} 0 &= f'(\bar{u}(t))u + \frac{f''(\bar{u}(t))}{2}u^2 - u^3 - v + d_u \Delta u \\ v_t &= u - \delta v + d_v \Delta v. \end{cases} \quad (2.3)$$

La première proposition établit l'existence, l'unicité locale et la stabilité de la solution stationnaire de la première équation de (2.2). On réécrit cette dernière sous la forme plus générale :

$$u_t = g(u) - v + d_u \Delta u. \quad (2.4)$$

PROPOSITION 2.1.

Soit $X = C^0(\bar{\Omega})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$. On suppose que $g \in$

$C^1(\mathbb{R})$ vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) < 0$, alors pour $v \in X$ et pour toute condition initiale $u_0 \in X \cap C^2(\Omega)$ avec $\|v\|$ et $\|u_0\|$ assez petits, la solution u de (2.4) évolue asymptotiquement vers l'unique solution stationnaire (localement) de (2.4) dans X .

La seconde proposition montre la décroissance exponentielle de v vers 0 sous la condition que $f'(\bar{u}) < 0$. Rappelons que $f(u) = -u^3 + 3u$ et $f'(u) = 3(1 - u^2)$,

donc $f'(\bar{u}) < 0 \Leftrightarrow |u| > 1$. On sait de plus que le temps pendant lequel $-1 < \bar{u} < 1$ est en $O(\epsilon)$. Donc (\bar{u}, \bar{v}) passe le plus de temps collée aux parties attractives de la cubique (voir figure 1). On précise maintenant la seconde proposition. On considère le système (2.3).

PROPOSITION 2.2.

On suppose que, pour tout $t \in I = [t_0, t_1]$, la fonction $v(x, t)$ reste dans la partie attractive de la cubique, alors pour tout $t \in I$:

$$\int_{\Omega} v^2(x, t) dx \leq e^{-2\delta(t-t_0)} \int_{\Omega} v^2(x, t_0) dx.$$

3. Une condition suffisante d'évolution vers des solutions à patterns

On énonce maintenant un théorème qui spécifie des conditions initiales pour lesquelles les solutions du système (1.2) ne pourront pas évoluer asymptotiquement vers (\bar{u}, \bar{v}) .

THÉORÈME 3.1.

On suppose qu'il existe une partition $(\bigcup_{i \in \{1, \dots, l\}} U_i) \cup (\bigcup_{i \in \{1, \dots, l\}} V_i)$ de Ω telle que pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$ il existe un difféomorphisme ϕ_i de U_i dans V_i avec $|\det J_{\phi_i}| = 1$, où J_{ϕ_i} représente la matrice jacobienne de ϕ_i et des conditions initiales telles que pour tout $x \in \bigcup_{i \in \{1, \dots, l\}} U_i$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(u_i(\phi_i(x), t), v_i(\phi_i(x), t)) = -(u_i(x, t), v_i(x, t))$ alors la solution de (1.2) ne peut pas évoluer asymptotiquement vers (\bar{u}, \bar{v}) .

Preuve. Sous les hypothèses du théorème, on a pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, t) dx &= \sum_{i=1}^l \int_{U_i} u(x, t) dx + \sum_{i=1}^l \int_{V_i} u(x, t) dx \\ &= \sum_{i=1}^l \int_{U_i} u(x, t) dx + \sum_{i=1}^l \int_{U_i} u(\phi_i(x), t) |\det J_{\phi_i}| dx \\ &= \sum_{i=1}^l \int_{U_i} u(x, t) dx - \sum_{i=1}^l \int_{U_i} u(x, t) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le même résultat est valide pour $\int_{\Omega} v(x, t) dx$. Or pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{\Omega} (\bar{u}(t), \bar{v}(t)) \neq (0, 0).$$

Les deux corollaires ci-dessous fournissent des exemples d'application du théorème 3.1.

COROLLAIRE 3.2.

On suppose que le domaine Ω possède 0 comme centre de symétrie et que pour tout $x \in \Omega$, $(u_0, v_0)(x) = -(u_0, v_0)(-x)$, alors pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \Omega$, $(u, v)(x, t) = -(u, v)(-x, t)$. Il s'ensuit que la solution de (1.2) ne peut pas évoluer asymptotiquement vers (\bar{u}, \bar{v}) .

Proof 3.3 (Preuve) C'est une conséquence de la symétrie et du fait que $(f(-u) + v, -u + \delta v) = -(f(u) - v, u - \delta v)$.

On note $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

COROLLAIRE 3.4.

On suppose que $(x_1, 0)$ est un axe de symétrie pour le domaine Ω et que pour tout $x \in \Omega$ $(u_0, v_0)(x_1, x') = -(u_0, v_0)(x_1, -x')$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \Omega$, $(u, v)(x_1, x', t) = -(u, v)(x_1, -x', t)$. Il s'ensuit que la solution de (1.2) ne peut pas évoluer asymptotiquement vers (\bar{u}, \bar{v}) .

4. Simulations numériques

On présente ici quelques simulations numériques du système (1.2). On utilise un programme en C++ avec un schéma aux différences finies en espace et RK4 en temps. On choisit comme pas de temps $dt = 0.01$ sur l'intervalle $[0, 200]$ et comme pas d'espace $h = 1$ sur le domaine carré $[0, 100] \times [0, 100]$. Par ailleurs on a pris comme valeurs de paramètres : $d_u = 1, d_v = 1, \epsilon = 0.1, \delta = 0.2$. Les résultats des simulations sont représentés dans les figures 4.1 à 4.5.

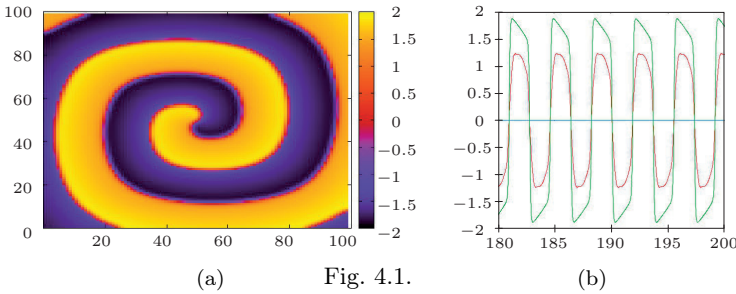


Fig. 4.1(a). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2). On représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $t = 190$. Elle est obtenue en choisissant les conditions initiales de la manière suivante. Le carré Ω est divisé en quatre parties d'aire égales. On prend ensuite $(u_0(x), v_0(x)) = (1, 0)$ sur le quart de carré en haut et à gauche, $(u_0(x), v_0(x)) = (0, 1)$ en haut à droite, $(u_0(x), v_0(x)) = (0, -1)$ en bas à gauche et $(u_0(x), v_0(x)) = (-1, 0)$ en bas à droite. Cela conduit à un comportement asymptotique de type spirale, et constitue une application du corollaire 3.2. On peut remarquer que le centre du carré est en effet un point de symétrie de la spirale.

Fig. 4.1(b). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2) en quelques points de l'espace. La courbe verte représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 100, t)$ et $t \in [180, 200]$. La courbe rouge représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 50, t)$, et $t \in [180, 200]$. Enfin, la courbe bleue représente $\mathcal{I} := \int_{\Omega} u(x, t) dx$, pour $t \in [180, 200]$. Elle est obtenue avec les mêmes conditions qu'à la figure 4.1(a). Pour $x \in \Omega$, les simulations numériques tendent à montrer que les trajectoires évoluent asymptotiquement autour de cycles-limites de même période, les motifs observés résultent d'un décalage de phases autour des cycles-limites. On remarque que la quantité \mathcal{I} est nulle comme cela est démontré dans le théorème 3.1.

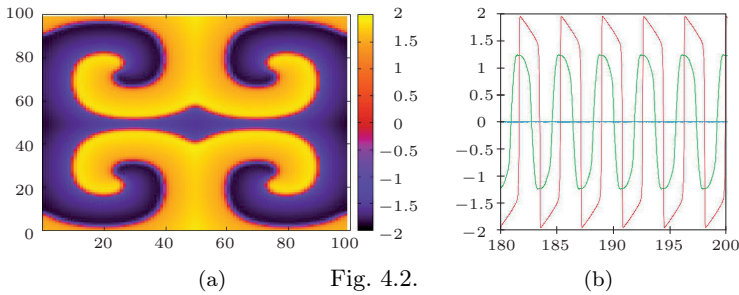


Fig. 4.2.

Fig. 4.2(a). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2). Elle représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $t = 190$. Elle est obtenue en reproduisant les conditions initiales de la figure 2 par symétrie axiale. Plus précisément, nous reproduisons les conditions initiales de la figure 4.1(a) sur le quart supérieur gauche de Ω . Ensuite, on effectue une symétrie axiale de l'axe $(x_1, 0)$ pour obtenir les conditions initiales sur la partie inférieure gauche du carré, et une symétrie axiale de l'axe $(0, x_2)$ pour obtenir les conditions initiales sur la partie supérieure droite du carré. Enfin, on choisit les conditions initiales sur la partie inférieure droite par symétrie centrale de la partie supérieure gauche. On obtient ainsi asymptotiquement quatre spirales. On peut montrer par symétrie que le choix de ces conditions initiales, implique que la solution sur le quart supérieur gauche vérifie l'équation (1.2) avec conditions de Neumann (avec comme domaine le quart supérieur gauche). On retrouve alors la spirale sur le coin supérieur gauche et par symétrie sur les autres sous-domaines également. On peut répéter cette procédure autant de fois que nécessaire (il y a tout de même une différence entre ces spirales à différentes échelles car la taille des sous-domaines diminue). Ainsi la figure 4.3(a) montre 16 spirales.

Fig. 4.2(b). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2) en certains points de l'espace. La courbe verte représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 50)$, et $t \in [180, 200]$. La courbe rouge représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 100)$ et $t \in [180, 200]$. Enfin, la courbe bleue représente $\mathcal{I} := \int_{\Omega} u(x, t) dx$, pour $t \in [180, 200]$. Elle est obtenue en choisissant les mêmes conditions initiales qu'à la figure 4.2(a). Elle illustre un comportement asymp-

totique non homogène en espace. Pour tout $x \in \Omega$ la trajectoire évolue asymptotiquement autour de cycles limites de même période, les motifs observés résultant d'un décalage de phase. On peut remarquer que la quantité \mathcal{I} est nulle. En effet, conformément au corollaire 3.2, sur chacun des quatre sous-quart domaines du carré l'intégrale est nulle.

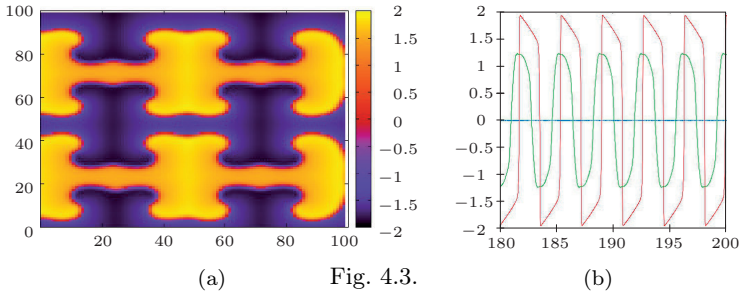


Fig. 4.3(a). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2). Plus précisément, elle représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $t = 190$. Elle est obtenue en itérant deux fois la procédure décrite à la figure 4.2(a). On obtient seize spirales. **Fig. 4.3(b).** Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2) en certains points de l'espace. En effet, la courbe verte représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 50, t)$, et $t \in [180, 200]$. La courbe rouge représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 100, t)$ et $t \in [180, 200]$. Enfin, la courbe bleue représente $\mathcal{I} := \int_{\Omega} u(x, t) dx$, pour $t \in [180, 200]$. Elle est obtenue en choisissant les mêmes conditions initiales que dans la figure 4.3(a). Ceci illustre un comportement asymptotique de l'espace non homogène. Pour tout $x \in \Omega$ la trajectoire évolue asymptotiquement autour de cycles limites de même période, les motifs observés résultant d'un décalage de phase. On peut remarquer que la quantité \mathcal{I} est nulle conformément à ce qui est démontré dans le théorème 3.1.

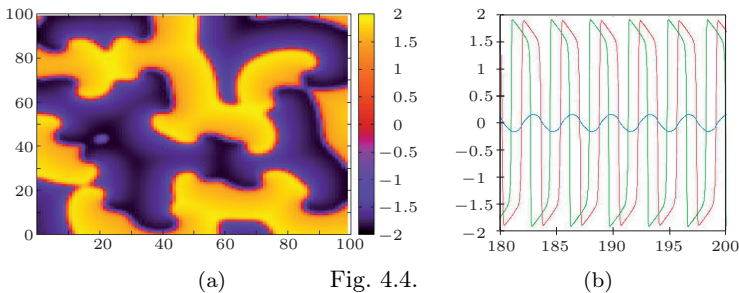


Fig. 4.4(a). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2). Plus précisément, elle représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $t = 190$. Elle est obtenue en choisissant pour tout $x \in \Omega$, $(u_0(x), v_0(x))$ comme une réalisation d'une variable stochastique uniforme sur $[-1, 1]$. Cela illustre un comportement asymptotique non homogène en espace. Toutefois la symétrie n'est plus évidente.

Fig. 4.4(b). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2) en certains points de l'espace. La courbe verte représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 50, t)$ et $t \in [180, 200]$. La courbe rouge représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 100, t)$ et $t \in [180, 200]$. Enfin, la courbe bleue représente $\mathcal{I} := \int_{\Omega} u(x, t) dx$, pour $t \in [180, 200]$. Comme précédemment, elle est obtenue en choisissant pour tout $x \in \Omega$, $(u_0(x), v_0(x))$ comme une réalisation d'une variable stochastique uniforme sur $[-1, 1]$. Elle illustre un comportement asymptotique non homogène en espace. Pour tout $x \in \Omega$ la trajectoire évolue asymptotiquement autour de cycles limites de même période, les motifs observés résultant d'un décalage de phase. On peut remarquer que la quantité \mathcal{I} n'est plus nulle mais oscille autour approximativement entre -0.2 et 0.2 .

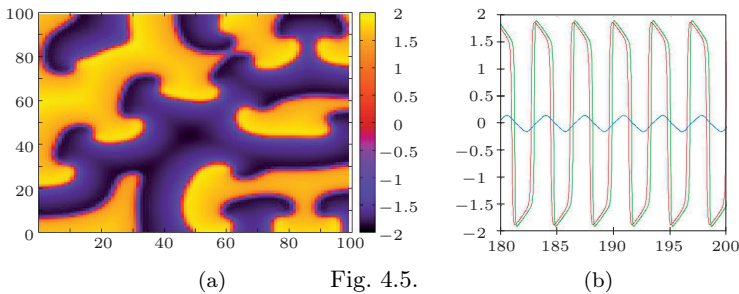


Fig. 4.5(a). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2). Plus précisément, elle représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $t = 190$. Elle est obtenue en choisissant pour tout $x \in \Omega$, $(u_0(x), v_0(x))$ comme une réalisation d'une variable stochastique suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Cela illustre un comportement asymptotique non homogène en espace, mais la symétrie n'apparaît pas de manière évidente.

Fig. 4.5(b). Cette figure montre l'évolution asymptotique d'une solution de (1.2) en certains points de l'espace. La courbe verte représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 50, t)$ et $t \in [180, 200]$. La courbe rouge représente $u(x_1, x_2, t)$ pour $(x_1, x_2) = (50, 100, t)$ et $t \in [180, 200]$. Enfin, la courbe bleue représente $\int_{\Omega} u(x, t) dx$, pour $t \in [180, 200]$. Comme précédemment, elle est obtenue en choisissant, pour tout $x \in \Omega$, la condition initiale $(u_0(x), v_0(x))$ comme une réalisation d'une variable stochastique de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Elle illustre un comportement asymptotique non homogène en espace. Pour tout $x \in \Omega$ la trajectoire évolue asymptotiquement autour de cycles limites de même période, les motifs observés résultant d'un décalage de phase. On peut remarquer que la quantité \mathcal{I} n'est plus nulle mais oscille autour de valeurs centrées en 0, à savoir ici entre -0.2 et 0.2 .

5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons discuté et étudié la caractérisation des solutions patterns dans un système de réaction diffusion avec une symétrie et une partie réactive oscillante. Nous avons apporté trois contributions :

- la condition d'intégrale nulle comme condition favorisant l'apparition des patterns,
- le plan de la preuve de la démonstration de la stabilité de la solution homogène en espace par des techniques lente-rapides,
- l'idée de conditions initiales stochastiques d'espérance nulle comme conditions favorisant l'apparition de solutions patterns non-symétriques.

Nous espérons que ces trois points pourront être développés dans de futurs travaux.

Remerciements. Ce travail a été en partie rédigé pendant les séjours du premier auteur au Courant Institute of Mathematical Science (NY). Le premier auteur tient donc à remercier en particulier L. Mertz avec lequel il a pu discuter durant ces séjours et dont certains éléments de ces échanges ont pu ensuite émerger pour se concrétiser ici.

Bibliographie

- [1] B. AMBROSIO and J. P. FRANÇOISE, Propagation of bursting oscillations, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 367,4863-4875, 2009.
- [2] B. AMBROSIO et M. A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo type, *Computer and Mathematics with application*, 64, 934-943, 2012.
- [3] B. AMBROSIO et M. A. AZIZ-ALAOUI, Characterization of Basin of Attraction of patterns in the FitzHugh-Nagumo Reaction Diffusion oscillatory system, en cours.
- [4] M. GOLUBITSKY and I. STEWART, *The Symmetry Perspective*, Birkhauser, 2002.
- [5] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer, 2010.
- [6] F. ROTHE, *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*, Springer, 1984.
- [7] R. FITZHUGH, Mathematical models of excitation and propagation in nerve, in *Biological Engineering*, H. P. Schwan, ed., McGraw-Hill, N.Y. (1969).
- [8] J. NAGUMO, S. ARIMOTO and S. YOSHIKAWA, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proe. IRE* 50 (1962), 2061-2070.
- [9] A. M. TURING, The Chemical Basis of Morphogenesis, *Phil. Trans. R. Soc. B*, 237,37-72, 1952.
- [10] E. CONWAY, D. HOFF and J. SMOLLER, Large-time behaviour of solutions of systems of non linear reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math*, 35, 1-16, 1978.

Colloque Fédération Normandie-Mathématiques

EDP - Normandie

21 & 22 Octobre 2015

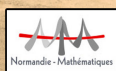
**Université du Havre
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées du Havre
UFR des Sciences et Techniques**

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Laurent Boudin (LJLL, UPMC & Reo, Inria)
Catherine Choquet (MIA, La Rochelle)
Rabah Labbas (LMAH, Le Havre)
Annie Raoult (MAP5, Paris Descartes)
Taoufik Sassi (LMNO, Caen)

Université du Havre
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées du Havre
UFR des Sciences et Techniques
25, rue Philippe Lebon - BP 540
76058 - LE HAVRE

Fédération
Normandie-Mathématiques
FR CNRS 3335



COMITÉ D'ORGANISATION

Benjamin Ambrosio (LMAH, Le Havre)
Christian Dogbe (LMNO, Caen)
Valentina Lanza (LMAH, Le Havre)
Mohammed Louaked (LMNO, Caen)
Sorin Mardaré (LMRS, Rouen)

CONFÉRENCIERS

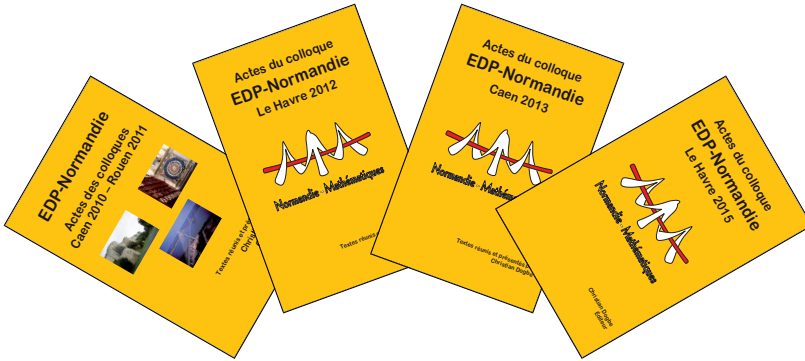
Farid Ammar Khodja (Besançon)
Dwight Barkley (Warwick)
Ariela Briani (Tours)
Paola Causin (Milan)
Philippe G. Ciarlet (Hong Kong)
Michel Chipot (Zurich)
Stephen Coombes (Nottingham)
Isabelle Gallagher (Paris)
Kamel Hamdache (Paris)
François Hamel (Aix-Marseille)
Petru Mironescu (Lyon)
Olivier Pantz (Polytechnique)
Benoit Perthame (Paris)
Delphine Salort (Paris)
Nicoletta Tchou (Rennes)
Hatem Zaag (Paris)

Site Web: <http://edp-normandie3.sciencesconf.org/>
Blog: <http://edp-normandie3.blogspot.fr/>
Email: edp-normandie3@sciencesconf.org

Fiche d'inscription sur le site WEB de la conférence
Date limite d'inscription : 12 Octobre 2015



Actes des Colloques “EDP-Normandie”



- **Actes des colloques Caen 2010 - Rouen 2011**
39+33 communications, 362 pages.
ISBN 978-2-9541221-0-6
- **Actes du colloque Le Havre 2012**
14 communications, 150 pages.
ISBN 978-2-9541221-1-3
- **Actes du colloque Caen 2013**
17 communications et 26 posters, 350 pages.
ISBN 978-2-9541221-2-0
- **Actes du colloque Le Havre 2015**
20 communications et 40 posters, 432 pages.
ISBN 978-2-9541221-3-7

**Département de
mathématiques et mécanique**

Campus 2, Côte de Nacre

Boulevard Maréchal Juin
Bâtiment Sciences 3
Bureaux S3-206/213
14 032 Caen CEDEX
Tel. : 02 31 56 73 60
Fax : 02 31 56 73 20
sonia.esnault@unicaen.fr

Dogbe, Christian (ed.)

Proceedings of the 5th “EDP-Normandie” colloquium of the Fédération Normandie-Mathématiques on partial differential equations and its applications, Le Havre, France, October 21–22, 2015. (Actes du colloque “EDP-Normandie”, Le Havre, France, Octobre 21–22, 2015.) (French, English) [\[Zbl 06550722\]](#)

Normandie-Mathématique. [s.l.]: Fédération Normandie-Mathématiques (ISBN 978-2-9541221-3-7/pbk). xxix, 396 p. (2016).

The articles of this volume will be reviewed individually. For the preceding colloquium see [\[Zbl 1296.35005\]](#).

MSC:

- [35-06](#) Proceedings of conferences (partial differential equations)
- [35Qxx](#) PDE of mathematical physics and other areas
- [00B25](#) Proceedings of conferences of miscellaneous specific interest

Dogbe, Christian (ed.)

Proceedings of the 4th “EDP-Normandie” colloquium of the Fédération Normandie-Mathématiques on partial differential equations and its applications, Caen, France, October 24–25, 2013. (Actes du colloque “EDP-Normandie”, Caen, France, Octobre 24–25, 2013.) (French, English) [[Zbl 1296.35005](#)]
Normandie-Mathématique. [s.l.]: Fédération Normandie-Mathématiques (ISBN 978-2-9541221-2-0/pbk). xxvi, 321 p. (2014).

The articles of this volume will be reviewed individually. For the preceding colloquium see [[Zbl 1296.35006](#)].

Indexed articles:

Amrouche, Chérif, Stokes and Navier-Stokes equations with different boundary conditions, 1-15 [[Zbl 1311.35202](#)]

Besse, Nicolas, Asymptotic analysis of the eigenvalue problem for the gyrowaterbag operator in toroidal geometry, 17-30 [[Zbl 1327.35277](#)]

Calvez, Vincent, Kinetic travelling waves with applications to biology, 31-41 [[Zbl 1316.35068](#)]

Esteban, Maria J., Spectral estimates on the sphere and on compact manifolds without boundary, 43-46 [[Zbl 1316.58024](#)]

Gerbeau, J-F.; Lombardi, D., Approximated Lax pairs and reduced order modeling, 47-53 [[Zbl 06415589](#)]

Lafitte, Pauline; Mascia, Corrado, Study of a transition phase model of nonlinear diffusion type, 55-61 [[Zbl 1310.65111](#)]

Maday, Yvon, Numerical analysis of some problems of electronic structure calculations, 63-64 [[Zbl 1311.82046](#)]

Mancini, Simona, On a Fokker-Planck equation modeling particles trapped in a double well potential, 65-73 [[Zbl 1316.35285](#)]

Monniaux, Sylvie, The Navier-Stokes system with Coriolis force in a halfspace with rough boundary, 75-86 [[Zbl 06415593](#)]

Aymard, B.; Clément, F.; Coquel, F.; Monniaux, D.; Postel, M., Numerical simulation of a hyperbolic PDE system with discontinuous flux, 87-99 [[Zbl 1330.35462](#)]

Salort, Delphine, Models of neuronal networks and synchronization phenomena, 101-113 [[Zbl 1316.35288](#)]

Turpault, R.; Berthon, C.; Boutin, B., Shock profiles for St-Venant-Exner, 115-124 [[Zbl 1310.76084](#)]

Nicolas, Vauchelet, Kinetic description and asymptotic models of bacteria motion in chemotaxis, 125-132 [[Zbl 06415597](#)]

Phan, V.L.Em; Ambrosio, B.; Aziz, M.A., Analysis of a complex and complete network of reaction-diffusion equations of FitzHugh-Nagumo type, 133-14 [[Zbl 1325.35243](#)]

Wilk, Olivier, Absorbing boundary conditions of high order, domain decomposition and wave models, 145-156 [[Zbl 1311.76086](#)]

Alberdi Celaya, E.; Anzala Aguirrezabala, J.J., The computation of EBDF and MEBDF methods using backward differences, 157-170 [[Zbl 1310.65078](#)]

Ambrosio, Benjamin, Hopf bifurcation for a reaction-diffusion system from neuroscience, 171-180 [[Zbl 1311.35018](#)]

Aguillon, Nina, A reconstruction schema in gas dynamics, 184-187 [[Zbl 1310.76103](#)]

Alberdi Celaya, E.; Anza Aguirrezabala, J.J., The behaviour of backward differentiation formulae in high-frequency modes, 190-191 [[Zbl 1310.65116](#)]

Bourdin, Loïc; Trélat, Emmanuel, The Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales, 198-202 [[Zbl 1311.49049](#)]

- Boutarene, Khaled El-Ghaoui*, Approximate transmission conditions for a Poisson problem, 206-208 [Zbl 1312.35062]
- Breteaux, Sébastien*, A geometric derivation of the linear Boltzmann equation, 212-213 [Zbl 1328.35140]
- Cazeaux, Paul; Grandmont, Céline*, A nonlocal homogenization model for the mechanical behavior of human lungs, 216-217 [Zbl 06415608]
- Chatard, M.; Chainais-Hillairet, C.; Filbet, F.*, Discrete functional inequalities for finite volume schemes, 220-223 [Zbl 1312.65142]
- Chourabi, Imen; Donato, Patrizia*, A quasilinear singular problem with nonlinear Robin conditions, 226-228 [Zbl 1312.35063]
- Cocquet, Pierre-Henri*, A numerical scheme for approximation of metamaterial acoustics, 232-233 [Zbl 1311.74115]
- Court, Sébastien*, Stabilisation of a fluid-solid system, by the deformation of the self-propelled solid, 236-237 [Zbl 1311.35213]
- Fouchet-Incaux, J.; Grandmont, C.; Martin, S.*, Modeling of the air flow in the human respiratory system: a numerical stability study, 240-241 [Zbl 1307.92058]
- Gazeau, Maxime*, Wave propagation in complex random environments, 244-245 [Zbl 1325.35295]
- Lacouture, L.; Decoene, A.; Martin, S.; Maury, B.*, Numerical solution of elliptic problems with a Dirac mass on the right-hand side, 248-251 [Zbl 1311.76064]
- Lahbib, Imen; Blouza, Adel*, A posteriori analysis of an anisotropic shell of low regularity, 254-256 [Zbl 06415616]
- Levitt, Antoine*, Convergence of algorithms for Hartree-Fock models in quantum chemistry, 260-261 [Zbl 1315.81112]
- Mimault, Matthias*, Macroscopic modeling of crowd movements. An application to crowded decomposition into two groups, 264-271 [Zbl 1311.35154]
- Boyer, Franck; Krell, Stella; Nabet, Flore*, Inf-sup stability of DDFV schemes for the 2D Stokes problem, 274-279 [Zbl 1311.76077]
- Najeme, Mohamed; Glangetas, Léo*, Analytic and Gevrey regularity for kinetic equations, 282-283 [Zbl 1311.35046]
- Phan, V.L.; Ambrosio, B.; Aziz-Alaoui, M.*, Complex networks of neurons modeled by PDEs of FitzHugh-Nagumo type, 286 [Zbl 1325.35242]
- Rota Nodari, Simona*, Study of a nonlinear model from nuclear physics, 290-292 [Zbl 1316.35267]
- Runge, Vincent*, Study of Hele-Shaw flow by Helmholtz-Kirchhoff transformation, 296-298 [Zbl 1311.35231]
- Saleh, Khaled; Latché, Jean-Claude*, A staggered scheme for the incompressible Navier-Stokes equations with variable density, 302-303 [Zbl 1311.35189]
- Tine, Léon M.; Meunier, Nicolas*, Mathematical modeling of atherosclerosis, 306-308 [Zbl 1311.35328]
- Ali, Hanı*, Existence and convergence of a modified deconvolution model, 312-316 [Zbl 1311.35183]
- Yvinec, Romain*, Deterministic and stochastic nucleation models, 317-320 [Zbl 1311.35329]

MSC:

- 35-06** Proceedings of conferences (partial differential equations)
- 35Qxx** PDE of mathematical physics and other areas
- 00B25** Proceedings of conferences of miscellaneous specific interest

Cited in 1 Review

Bon de commande

Actes des colloques de la collection
NORMANDIE-MATHEMATIQUES
(merci d'écrire en MAJUSCULE)



Nom :

Prénom :

Adresse :

.....

Téléphone :

E.mail :

ISBN	Titres	Prix unitaire	Prix auteur	Quantité	Total
978-2-9541221-0-6	EDP-Normandie Actes des colloques Caen 2010 - Rouen 2011 (362 pages)	20 €	15 €		
978-2-9541221-1-3	EDP-Normandie Actes du colloque Le Havre 2012 (150 pages)	15 €	10 €		
978-2-9541221-2-0	EDP-Normandie Actes du colloque Caen 2013 (350 pages)	20 €	15 €		
978-2-9541221-3-7	EDP-Normandie Actes du colloque Le Havre 2015 (432 pages)	25 €	20 €		
	Les QUATRE volumes	70 €	54 €		
	Participation aux frais de port*				
	Total à Payer				

* Participation aux frais de port :

- Pour toute commande inférieure à 25 € --> 2,80 €
- Pour toute commande entre 25 – 35 € --> 5,60 €
- Pour toute commande supérieure à 45 € --> frais de port offerts.

A Date de commande

Signature :

Bon de commande à retourner, accompagné de votre chèque à l'ordre de
l'**agent comptable de l'université de Caen-Normandie**, à l'adresse suivante :

Madame **Sonia Esnault**

Université de Caen-Normandie Département de Mathématiques Campus 2,
Côte de Nacre, Bd Maréchal Juin, 14032 Caen Cedex (France)

Téléphone : 02 31 56 73 60 Fax : 02 31 56 73 20 Courriel : sonia.esnault@unicaen.fr

Votre commande sera expédiée accompagnée d'une facture acquittée, dans les deux jours ouvrés qui suivront l'encaissement validé de votre règlement. *Merci et à bientôt!*