



# Synchronisation dans un réseau d'équations aux dérivées partielles de type FitzHugh-Nagumo généralisé

B. Ambrosio<sup>1</sup>, M.A. Aziz-Alaoui<sup>2</sup>

**Résumé.** On considère un système complexe basé sur un réseau d'interactions entre neurones dont chaque noeud du réseau est modélisé par un système d'équations aux dérivées partielles de type FitzHugh-Nagumo. Une fois la topologie fixée, on démontre des résultats qualitatifs sur le comportement asymptotique du système.

## 1. Introduction

Le modèle de FitzHugh-Nagumo,

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= (F(u) - v + z) \\ v_t &= au - bv + c \end{cases} \quad (1.1)$$

où

$$w_t = \frac{dw}{dt}$$

et où  $F$  est une cubique à coefficient dominant négatif,  $z$  est constante,  $\epsilon > 0$  petit,  $a, b, c$  des constantes strictement positives est une simplification du célèbre modèle de Hodgkin-Huxley décrivant la propagation du potentiel d'action dans les neurones, voir par exemple, [10, 12, 13, 14, 16, 17]. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné régulier. Le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + d_u \Delta u \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t &= au - bv - c(x) + d_v \Delta v \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.2)$$

où,

$$u = u(x, t), \quad f(u) = -u^3 + 3u,$$

et avec conditions aux bords de Neumann, permet d'obtenir une riche variété de patterns et phénomènes pertinents en physiologie. On peut ainsi exhiber des comportements tels que la formation de spirales, les *Mixed Mode Oscillations*, la propagation d'oscillations en salves (voir [1, 2, 3, 4]). Ces dernières années, des efforts notables ont été fournis dans la construction et l'analyse de modèles de réseaux de neurones (voir par exemple [5, 10]). Une des applications majeures est l'analyse des interactions dans les différentes zones de l'encéphale

---

<sup>(1),(2)</sup>Normandie Univ, France - ULH, LMAH, F-76600 Le Havre ; FR CNRS 3335, 25 rue Philippe Lebon 76600 Le Havre, France. benjamin.ambrosio@univ-lehavre.fr, aziz.alaoui@univ-lehavre.fr

(voir [6, 7]). C'est dans cette perspective que l'on s'intéresse, dans cet article, à l'analyse du comportement d'un ensemble de neurones connectés entre eux selon une topologie donnée. On considère ainsi un système complexe basé sur un réseau d'interactions entre neurones dont chaque noeud du réseau est modélisé par une EDP de type (1.2). Une fois la topologie fixée, on montre des résultats qualitatifs sur le comportement asymptotique du système. L'article est divisé comme suit : dans le paragraphe 2, on rappelle la modélisation de Hodgkin et Huxley (HH), c'est à dire l'analogie électrique et la signification des termes de l'équation. On rappelle ensuite comment passer du modèle HH au modèle de FitzHugh-Nagumo (1.1). Puis on rappelle quelques propriétés du système (1.1) et on illustre quelques solutions du système de réaction-diffusion associé (1.2). Le paragraphe 3 constitue la partie principale de l'article. C'est dans cette partie que l'on introduit le système complexe constitué d'un réseau de systèmes de type (1.2) couplés linéairement selon une topologie maître-esclave. On énonce alors, et on démontre, deux théorèmes de synchronisation.

## 2. Le modèle de Hodgkin et Huxley et le passage au modèle de FitzHugh-Nagumo

En 1952, après des expériences sur l'axone géant du Calmar, Hodgkin et Huxley proposent le premier modèle mathématique élaboré d'un neurone :

$$(HH) \quad \left\{ \begin{array}{l} C \frac{dV}{dt} = -\bar{g}_K n^4 (V - E_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) - \bar{g}_L (V - E_L) + I \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h. \end{array} \right.$$

C'est un modèle basé sur l'analogie électrique. En utilisant la loi de Kirchoff, on suppose que le courant sortant de la cellule est égal, à la somme des courants ioniques et d'un courant de capacitance. Les courants ioniques sont déduits de la loi d'Ohm, mais en introduisant une conductance variable. C'est l'hypothèse principale du modèle de Hodgkin et Huxley : les courants ioniques sont variables, car ils dépendent de l'ouverture ou de la fermeture de canaux ioniques. Le courant de capacitance, vient du fait que la membrane cellulaire joue le rôle d'un condensateur. Dans l'équation, la variable  $V$  représente le potentiel de membrane, c'est à dire la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule, la constante  $I$  représente le courant externe,  $E_K$ ,  $E_{Na}$ ,  $E_L$  représentent les valeurs d'équilibre électrochimique pour chaque ion, obtenues grâce à l'équation de Nernst, voir [1, 8, 10, 13]. Les quantités  $\bar{g}_K n^4$ ,  $\bar{g}_{Na} m^3 h$ ,  $\bar{g}_L$  représentent les conductances associées au potassium, au sodium et au courant de fuite, essentiellement constitué d'ions chlorure. Les conductances du potassium et du sodium peuvent varier selon l'ouverture ou la fermeture des canaux. Cela est modélisé par les variables  $m, h$  et  $n$ . Ce sont des variables portes variant entre 0 et 1. Elles représentent respectivement les variables d'activation et d'inactivation du sodium, et d'activation du

potassium. Le taux d'ouverture des canaux sodium dépend de la probabilité d'ouverture des trois composantes de la porte d'activation du sodium (probabilité  $m^3$ ) de la probabilité de fermeture de la porte d'inactivation (probabilité  $h$ ). Le taux d'ouverture des canaux potassium dépend de la probabilité d'ouverture des quatre composantes de la porte d'activation du potassium ( $n^4$ ). Les constantes  $\bar{g}_K$ ,  $\bar{g}_{Na}$  et  $\bar{g}_L$  sont les conductances maximales. La constante  $C$  est la capacitance. Les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de  $V$ , elles représentent les taux de transferts, des états ouverts vers les états fermés et vice versa. Elles ont été expérimentalement déterminées par Hodgkin et Huxley selon la technique du "Patch-clamp", voir [10, 12].

A partir du modèle (HH), on obtient le modèle (1.1) en procédant de la manière suivante. On remarque que, dans le plan,  $n$  et  $h$  n'évoluent pas trop loin d'une droite affine et que

$$m(V) \simeq \frac{\alpha_m(V)}{\alpha_m(V) + \beta_m(V)},$$

on obtient alors un modèle à deux équations. En approchant les nullclines par une cubique et une droite, on obtient un modèle de type FitzHugh-Nagumo (2.3).

On rappelle maintenant le comportement du modèle de FitzHugh-Nagumo suivant,

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v \\ v_t &= u - bv - c \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$f(u) = -u^3 + 3u, \quad \epsilon > 0 \text{ petit}, \quad b > 0 \text{ petit}.$$

Dans le cas limite  $b = 0$ , la dynamique du système selon la valeur de  $c$  est la suivante : si  $|c| \geq 1$  l'unique point stationnaire est attractif tandis que si  $|c| < 1$  le point stationnaire est répulsif et il existe un cycle limite attirant toutes les trajectoires, voir figure 2 et [1].

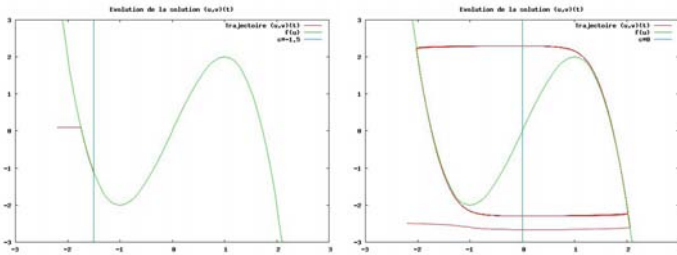


Fig. 2.1. Solutions du système (2.3).

En ajoutant de la diffusion, on obtient le système d'EDP(1.2). En jouant sur les conditions initiales, on peut obtenir une riche variété de solutions pour le système (1.2). Quelques-unes sont représentées par la figure 2, dans le cas où  $c = 0$ .

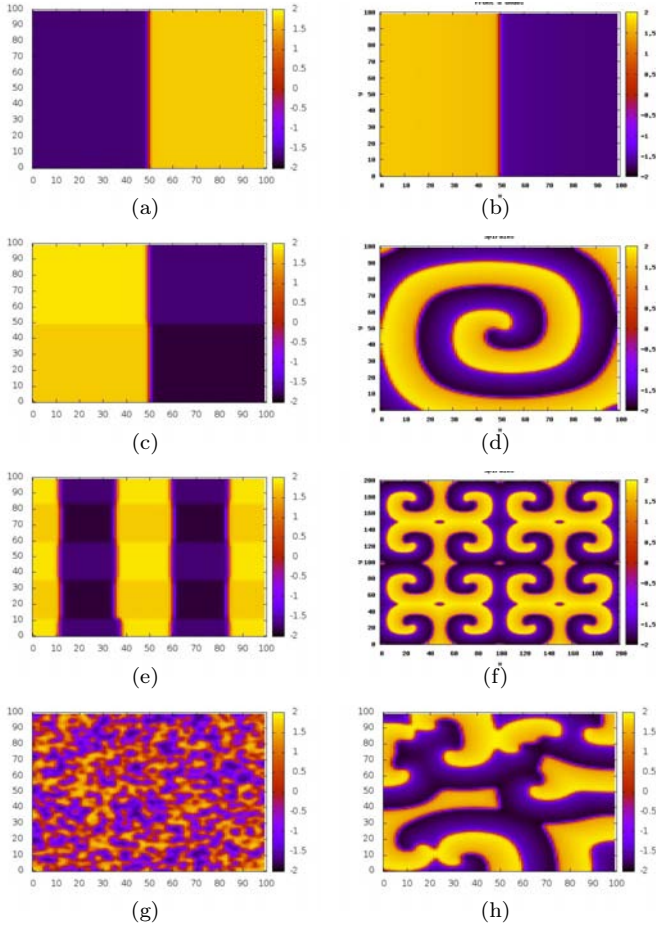


Fig. 2.2. Comportement asymptotique du système (1.2) pour  $a = 1$ ,  $b = 0.01$ ,  $c = 0$ ,  $\epsilon = 0.1$  et pour des conditions initiales particulières. (a) Conditions initiales correspondant à une fonction constante par morceaux sur  $\Omega$ . La fonction prend deux valeurs diamétralement opposées dans l'espace des phases, selon que la variable  $x$  se situe dans la partie gauche ou la partie droite de  $\Omega$ . (b) Asymptotiquement, la symétrie initiale est conservée. On observe une solution qui semble périodique en temps, avec une symétrie spatiale et en opposition de phase. (c) Conditions initiales correspondant à une fonction constante par morceaux sur  $\Omega$ . La fonction prend quatre valeurs régulièrement espacées dans l'espace des phases, selon la valeur de  $x$ . (d) Asymptotiquement, on observe une solution qui semble périodique en temps, et qui prend l'aspect d'une spirale en espace. (e) On reprend la condition initiale précédente que l'on reproduit seize fois avec une symétrie adaptée. (f) Asymptotiquement, on observe une solution qui semble périodique en temps, et qui prend la forme de seize spirales en espace. (g) La condition initiale est donnée, en chaque point  $x$  de  $\Omega$  par une valeur aléatoire entre  $-1$  et  $1$  et selon une loi uniforme. (h) Asymptotiquement on observe une solution qui semble périodique et avec des spirales plus désordonnées.

Lorsque  $c$  dépend de  $x$  on peut simuler des comportements de type pacemaker en jouant sur les caractéristiques excitables et oscillantes de la dynamique du système (2.3), voir figure 2. Pour des valeurs de bifurcations, on obtient des Mixed Mode Oscillations, voir figure 2.

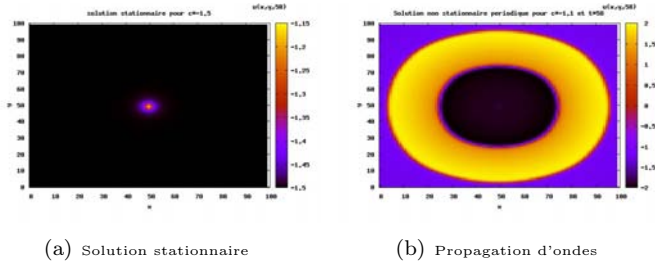


Fig. 2.3. Pacemaker, solution stationnaire et propagation d'ondes.

### 3. Un système complexe de systèmes de réaction-diffusion

On considère le système complexe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon u_{1t} = f(u_1) - v_1 + d_{u_1} \Delta u_1 + \gamma_1 \\ v_{1t} = a_1 u_1 - b_1 v_1 + d_{v_1} \Delta v_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \epsilon u_{it} = f(u_i) - v_i + d_{u_i} \Delta u_i + \alpha_i (u_{i-1} - u_i) + \gamma_i \\ v_{it} = a_i u_i - b_i v_i + d_{v_i} \Delta v_i + \beta_i (v_{i-1} - v_i) + \mu_i \\ \vdots \\ \epsilon u_{Nt} = f(u_N) - v_N + d_{u_N} \Delta u_N + \alpha_N (u_{N-1} - u_N) + \gamma_N \\ v_{Nt} = a_N u_N - b_N v_N + d_{v_N} \Delta v_N + \beta_N (v_{N-1} - v_N) + \mu_N \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ , pour  $i = 2, \dots, N$ ,  $a_i, b_i > 0$ , et où  $f$  est un polynôme de degré impair et de terme dominant négatif. On a alors :

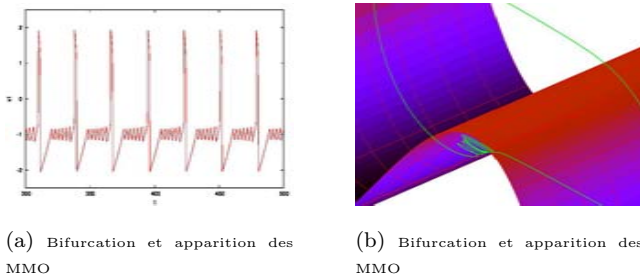


Fig. 2.4. Mixed Mode Oscillations (MMO).

THÉORÈME 3.1.

Soit  $\lambda$  la plus petite valeur propre non nulle de l'opérateur  $(-\Delta)$  avec conditions aux bords de Neumann et  $M = \sup_{\mathbb{R}} f'$ , on suppose que

$$M - \lambda d_{u_1} < 0 \text{ et } M - \lambda d_{u_i} < \alpha_i \quad \forall i \in 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^N \|u_i - \bar{u}_i\|_{L^2(\Omega)} + \|v_i - \bar{v}_i\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0, \quad (3.6)$$

où,

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_i(x, t) dx, \quad \bar{v}_i(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v_i(x, t) dx, \quad \forall i \in 1, \dots, N$$

et où  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  vérifient,

$$\begin{cases} \epsilon \bar{u}_{it} &= f(\bar{u}_i) - \bar{v}_i + \gamma_i + g_i(t) + \alpha_i(\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_i) \\ \bar{v}_{it} &= a_i \bar{u}_i - b_i \bar{v}_i + \mu_i + \beta_i(\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_i) \end{cases} \quad (3.7)$$

et où,  $g_i(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  avec décroissance exponentielle.

**Preuve.** On utilise un raisonnement par récurrence. On traite d'abord le système  $(u_1, v_1)$ , qui n'est pas dépendant du couplage. Soit :

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2} \left( \epsilon a \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 \right).$$

En dérivant  $\phi_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \int_{\Omega} (a \epsilon \nabla u_1 \nabla u_{1t} + \nabla v_1 \nabla v_{1t}) \\ &= \int_{\Omega} (a \nabla u_1 \nabla (f(u_1) - v_1 + d_{u_1} \Delta u_1) + \nabla v_1 \nabla (a u_1 - b v_1 + d_{v_1} \Delta v_1)) \\ &= \int_{\Omega} (a (f'(u_1) |\nabla u_1|^2 - d_{u_1} (\Delta u_1)^2) - b |\nabla v_1|^2 - d_{v_1} (\Delta v_1)^2) \end{aligned}$$

Or l'opérateur  $-\Delta$  avec conditions aux bords de Neumann vérifie :

$$\int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 \geq \lambda \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &\leq a \left( \int_{\Omega} M |\nabla u_1|^2 - \lambda d_{u_1} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \right) - b \int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 - \lambda d_{v_1} \int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 \\ &\leq a (M - \lambda d_{u_1}) \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 - (\lambda d_{v_1} + b) \int_{\Omega} |\nabla v_1|^2. \end{aligned}$$

Or  $\lambda d_{u_1} > M$ , donc,

$$\dot{\phi} \leq -2 \min \left( \frac{\lambda d_{u_1} - M}{\epsilon}, \lambda d_{v_1} + b \right) \phi,$$

donc,

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{-c_1 t}$$

où,

$$c_1 = 2 \min \left( \frac{\lambda d_{u_1} - M}{\epsilon}, \lambda d_{v_1} + b \right).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|u_1 - \bar{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_1 - \bar{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\lambda} \left( \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \max \left( \frac{1}{a\epsilon}, 1 \right) \phi(t) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|u_1 - \bar{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|v_1 - \bar{v}_1\|_{L^2(\Omega)}) = 0. \tag{3.8}$$

On montre maintenant que  $\bar{u}_1$  et  $\bar{v}_1$  sont solutions de (3.7) avec  $i = 1$  et  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ . On a :

$$\begin{cases} \epsilon \bar{u}_{1t} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u_1) - \bar{v}_1 + \gamma \\ \bar{v}_{1t} &= a\bar{u}_1 - b\bar{v}_1 + \mu \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} \epsilon \bar{u}_{1t} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (f(u_1) - f(\bar{u}_1)) + f(\bar{u}_1) - \bar{v}_1 + \gamma \\ \bar{v}_{1t} &= a\bar{u}_1 - b\bar{v}_1 + \mu. \end{cases}$$

Soit :

$$g(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (f(u_1) - f(\bar{u}_1)).$$

Alors,

$$\begin{cases} \epsilon \bar{u}_{1t} &= g(t) + f(\bar{u}_1) - \bar{v}_1 + \gamma \\ \bar{v}_{1t} &= a\bar{u}_1 - b\bar{v}_1 + \mu. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left| \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (f(u_1) - f(\bar{u}_1)) \right| \\ &\leq \frac{L}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_1 - \bar{u}_1| \\ &\leq \frac{L}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \|u_1 - \bar{u}_1\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

où,

$$L = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f'(\bar{u}_1(t))|.$$

Car d'après [15], on sait que  $(u_1, v_1) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ . On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0.$$

Ce qui montre le résultat pour le système  $(u_1, v_1)$ . On montre maintenant la récurrence. Soit :

$$\phi_i = \frac{1}{2} \left( \epsilon a_i \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 \right),$$

On montre que pour tout  $i \in 1, \dots, N$  il existe des constantes positives  $K_i, c_i$  telles que,

$$\phi_i(t) \leq K_i e^{-c_i t}.$$

On vient de montrer que le résultat est vrai pour  $i = 1$ . Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $i - 1$ . Après quelques calculs algébriques, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &\leq a_i \left( M - \lambda d_{u_i} - \alpha_i + \frac{\alpha_i \kappa_i}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 - \left( \lambda d_{v_i} + b_i + \frac{\beta_i}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 \\ &\quad + a_i \frac{\alpha_i}{2\kappa_i} \int_{\Omega} |\nabla u_{i-1}|^2 + \frac{\beta_i}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_{i-1}|^2 \\ &\leq a_i \left( M - \lambda d_{u_i} - \alpha_i + \frac{\alpha_i \kappa_i}{2} \right) \\ &\quad \times \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 - \left( \lambda d_{v_i} + b_i + \frac{\beta_i}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 + s_1 K_{i-1} e^{-c_{i-1} t} \\ &\leq -s_2 \phi + K_{i-1} e^{-c_{i-1} t} \end{aligned}$$

où  $\kappa_i$  est une constante positive vérifiant

$$\kappa_i < 2 \frac{\lambda d_{u_i} + \alpha_i - M}{\alpha_i},$$

et  $s_1 = \max\left(\frac{\alpha_i}{\epsilon \kappa_i}, \beta_i\right)$ ,  $s_2 = 2 \min\left(\frac{\lambda d_{u_i} + \alpha_i \left(1 - \frac{\kappa_i}{2}\right) - M}{\epsilon}, \lambda d_{v_i} + b_i + \frac{\beta_i}{2}\right)$ ,  $K_{i-1}, c_{i-1}$  sont des constantes positives. En intégrant, on obtient :

$$\phi_i(t) \leq K_i e^{-c_i t}.$$

Le reste de la preuve est identique à celle utilisée pour le système  $(u_1, v_1)$ .

### DÉFINITION 3.2.

Soit  $S_i = (u_i, v_i)$  et  $S = (S_1, S_2, \dots, S_N)$  un réseau de systèmes  $(S_i)_{i=1,2,\dots,N}$ . On dit que  $S$  synchronise identiquement si,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{N-1} (\|u_i - u_{i+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|v_i - v_{i+1}\|_{L^2(\Omega)}) = 0.$$

On appelle norme de l'erreur de synchronisation de  $S$ , la quantité,

$$\left( \sum_{i=1}^{N-1} (\|u_i - u_{i+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_i - v_{i+1}\|_{L^2(\Omega)}^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère le système (3.4) avec  $d_{u_i} = d_{u_j}$ ,  $d_{v_i} = d_{v_j}$  et  $b_i = b_j = b$ ,  $a_i = a_j = a \forall i, j \in 1, \dots, N$ . On rappelle que  $f$  est un polynôme de degré



impair avec un coefficient dominant strictement négatif,

$$f(u) = \sum_{k=1}^p d_k u^k, d_p < 0, p \geq 3.$$

Soit,

$$M = \sup_{u \in B, x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(u)}{k!} x^{k-1},$$

où  $B$  est un intervalle compact dans lequel  $u_1$  reste inclus. On a :

THÉORÈME 3.3.

Si  $\alpha_i > M, \quad i = 2, \dots, N$ , alors le réseau  $S = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N))$  synchronise au sens de la définition (3.2).

**Preuve.** On procède de nouveau par un raisonnement par récurrence. Soit :

$$\psi_i(t) = \frac{1}{2} \left( \epsilon a \int_{\Omega} (u_i - u_{i-1})^2 + \int_{\Omega} (v_i - v_{i-1})^2 \right).$$

On montre que pour tout  $i \in 2, \dots, N$ ,

$$\psi_i(t) \leq K_i e^{-c_i t}.$$

On considère d'abord le système  $(u_2, v_2)$ . En dérivant  $\psi_2$  et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_2(t) &\leq \int_{\Omega} (a(f(u_2) - f(u_1) - \alpha_2(u_2 - u_1))(u_2 - u_1) - (b + \beta_2)(v_2 - v_1)^2) \\ &\leq \int_{\Omega} (a(f'(u_1) - \alpha_2 + \sum_{k=2}^p \frac{f^{(k)}(u_1)}{k!} (u_2 - u_1)^{k-1})(u_2 - u_1)^2 \\ &\quad - (b + \beta_2)(v_2 - v_1)^2), \\ &\leq a(M - \alpha_2) \int_{\Omega} (u_2 - u_1)^2 - (b + \beta_2) \int_{\Omega} (v_2 - v_1)^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\dot{\psi}_2(t) \leq -c_2 \psi_2.$$

où  $c_2 = \min(\frac{\alpha_2 - M}{\epsilon}, b + \beta_2)$  est une constante positive. On obtient donc :

$$\psi_2 \leq \psi_2(0) e^{-c_2 t}.$$

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $i - 1$ . Alors, après quelques calculs

algébriques, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_i(t) &\leq \int_{\Omega} (a(f(u_i) - f(u_{i-1}) - \alpha_i(u_i - u_{i-1}) + \alpha_{i-1}(u_{i-1} - u_{i-2}))(u_i - u_{i-1}) \\
 &\quad - (b + \beta_i)(v_i - v_{i-1})^2 + \beta_{i-1}(v_{i-1} - v_{i-2})(v_i - v_{i-1})) \\
 &\leq \int_{\Omega} (a(M - \alpha_i)(u_i - u_{i-1})^2 + a\alpha_{i-1}(u_{i-1} - u_{i-2})(u_i - u_{i-1}) \\
 &\quad - (b + \beta_i)(v_i - v_{i-1})^2 + \beta_{i-1}(v_i - v_{i-1})(v_{i-1} - v_{i-2})) \\
 &\leq \int_{\Omega} (a(M - \alpha_i)(u_i - u_{i-1})^2 + \frac{a}{2} (\frac{\alpha_{i-1}^2}{\alpha_i - M} (u_{i-1} \\
 &\quad - u_{i-2})^2 + (\alpha_i - M)(u_i - u_{i-1})^2) \\
 &\quad - (b + \beta_i)(v_i - v_{i-1})^2 + \frac{1}{2} (\frac{\beta_{i-1}^2}{\beta_i} (v_{i-1} - v_{i-2})^2 + \beta_i(v_i - v_{i-1})^2))
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_i(t) &\leq \int_{\Omega} (a \frac{M - \alpha_i}{2} (u_i - u_{i-1})^2 - (b + \frac{\beta_i}{2})(v_i - v_{i-1})^2 \\
 &\quad + \frac{a}{2} \frac{\alpha_{i-1}^2}{\alpha_i - M} (u_{i-1} - u_{i-2})^2 + \frac{\beta_{i-1}^2}{2\beta_i} (v_{i-1} - v_{i-2})^2) \\
 &\leq -s_1 \psi_i + s_2 K_{i-1} e^{-c_{i-1}t},
 \end{aligned}$$

où  $s_1 = \min(\frac{\alpha_i - M}{\epsilon}, 2b + \beta_i)$  et  $s_2 = \max(\frac{\alpha_{i-1}^2}{\epsilon(\alpha_i - M)}, \frac{\beta_{i-1}^2}{\beta_i})$ . Le résultat s'obtient par intégration. Dans le cas où  $f$  est cubique, on en déduit le corollaire suivant :

#### COROLLAIRE 3.4.

Sous les hypothèses du théorème 3.3, si on suppose que  $f$  est une fonction cubique :  $f(u) = d_3 u^3 + d_2 u^2 + d_1 u$  avec  $d_3 < 0$  et si,

$$\alpha_i > d_1 - \frac{d_2^2}{2d_3}, \quad i = 2, \dots, N,$$

le système  $S = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N))$  synchronise au sens de la définition (3.2).

## 4. Simulations numériques

On considère le système (3.4) pour  $N = 3$  avec pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $d_{u_i} = d_{v_i} = 1$ ,  $a_i = 1$ ,  $b_i = 0.6$ . De plus, pour  $i \in \{2, 3\}$ , on fixe  $\beta_i = 0$ ,  $\alpha_i > 0$  et

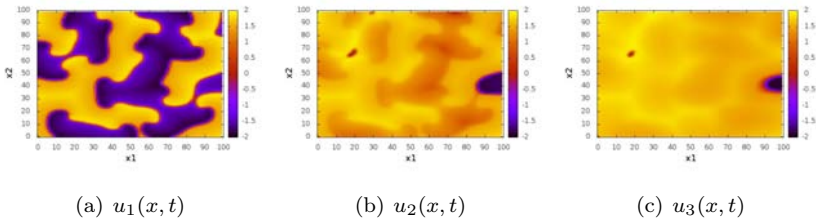


Fig. 3.1. Réseau de trois systèmes de type FitzHugh-Nagumo généralisé. Isovaleurs de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  au temps fixé  $t = 190$  pour la valeur de couplage  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.3$ .

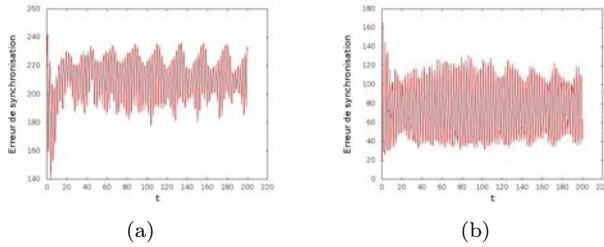


Fig. 3.2. Réseau de trois systèmes de type FitzHugh-Nagumo généralisé. La norme de l'erreur de synchronisation donnée par la définition 3.2 sur l'intervalle de temps  $[0, 200]$  pour le couplage  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.3$  : (a) entre  $S_1$  et  $S_2$ , (b) entre  $S_2$  et  $S_3$ .

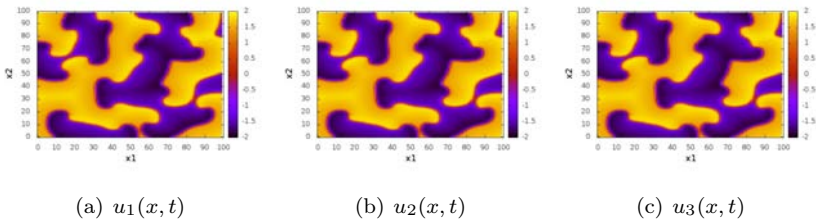


Fig. 3.3. Réseau de trois systèmes de type FitzHugh-Nagumo généralisé. Isovaleurs de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  au temps fixé  $t = 190$  pour la valeur de couplage  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.4$ .

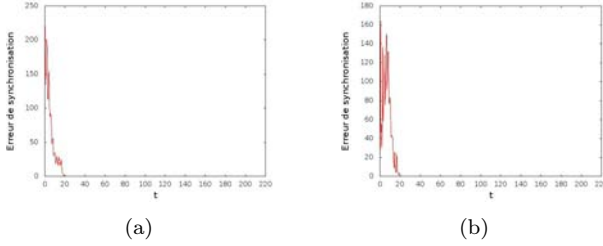


Fig. 4.1. Réseau de trois systèmes de type FitzHugh-Nagumo généralisé. La norme de l'erreur de synchronisation donnée par la définition 3.2 sur l'intervalle de temps  $[0, 200]$  pour le couplage  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.4$  : (a) entre  $S_1$  et  $S_2$ , (b) entre  $S_2$  et  $S_3$ .

$\epsilon = 0.1$ . On considère alors le système complexe :

$$\begin{cases} \epsilon u_{1t} = f(u_1) - v_1 + \Delta u_1 \\ v_{1t} = au_1 - bv_1 + \Delta v_1 \\ \epsilon u_{2t} = f(u_2) - v_2 + \Delta u_2 + \alpha_2(u_1 - u_2) \\ v_{2t} = au_2 - bv_2 + \Delta v_2 \\ \epsilon u_{3t} = f(u_3) - v_3 + \Delta u_3 + \alpha_3(u_2 - u_3) \\ v_{3t} = au_3 - bv_3 + \Delta v_3 \end{cases} \quad (4.9)$$

Les simulations numériques, voir figures 3, 3, 3, 4, montrent que le système (4.9) synchronise pour un terme de couplage  $\alpha_2 = \alpha_3$  appartenant à l'intervalle  $[0.3, 0.4]$ . Dans ces figures, les conditions initiales  $(u_1(x, 0), v_1(x, 0))$  sont données, pour tout  $x$ , par une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[-1, 1]$ , voir [3], tandis que  $(u_2(x, 0), v_2(x, 0)) = (u_3(x, 0), v_3(x, 0)) = 1$ . Pour les simulations numériques, on a utilisé un schéma aux différences finies explicite, codé en C++ avec un pas de temps égal à 0.01 et un pas d'espace égal à 1.

## Bibliographie

- [1] B. AMBROSIO, Propagation d'ondes dans un milieu excitable : simulations numériques et étude analytique, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2009.
- [2] B. AMBROSIO AND J-P FRANÇOISE, Propagation of bursting oscillations, Phil. Trans. R. Soc. A. 367, (2009) 4863-4875.
- [3] B. AMBROSIO AND M.A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo type, Comput. Math. Appl. 64 (2012), no. 5, 934-943.
- [4] M. KRUPA, B. AMBROSIO AND M.A. AZIZ-ALAOUI, Two weakly-coupled two slow-two fast systems, folded node and Mixed Mode Oscillations, submitted.
- [5] J. BALADRON, D. FASOLI, O. FAUGERAS AND J. TOUBOUL, Mean Field description and propagation of chaos in recurrent multipopulation net-

- works of Hodgkin-Huxley and Fitzhugh-Nagumo neuron, *The Journal of Mathematical Neuroscience*, 2 (2012).
- [6] M. CHAVEZ, M. VALENCIA, V. LATORA AND J. MARTINERIE, Complex Networks : new trends for the analysis of brain connectivity, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20 (2010) 1-10.
  - [7] M. CHAVEZ, M. BESSERVE AND M. LE VAN QUYEN, Dynamics of excitable neural networks with heterogenous connectivity, *Prog. Biophys. Mol. Biol.*,105 (2010) 29-33.
  - [8] N. CORSON, Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité, Thèse de doctorat, Université du Havre, 2009.
  - [9] E. CONWAY, D. HOFF AND J. SMOLLER, Large-time behaviour of solutions of systems of non linear reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.* 35 (1978) 1-16.
  - [10] G. B. ERMENTROUT AND D.H. TERMAN, *Mathematical Foundations of Neuroscience*, Springer, 2012.
  - [11] R. A. FITZHUGH, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.* 1, (1961) 445-466.
  - [12] A.L. HODGKIN AND A.F. HUXLEY, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.* 117 (1952) 500-544.
  - [13] E. M. IZHIKEVICH, *Dynamical systems in Neuroscience*, The MIT Press, 2007.
  - [14] J. P. KEENER AND J. SNEYD, *Mathematical Physiology*, Springer, 2009.
  - [15] M. MARION, Finite-Dimensionnal attractors associated with partly dissipative reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Anal.* 20 (1989) 816-844.
  - [16] J.D. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer, 2010.
  - [17] J. NAGUMO, S. ARIMOTO. AND S. YOSHIZAWA An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE.* 50 (1962) 2061-2070.





# Colloque Fédération Normandie-Mathématiques

## EDP - Normandie

23 & 24 Octobre 2012

Université du Havre  
Laboratoire de Mathématiques  
Appliquées du Havre  
UFR des Sciences et Techniques

### COMITÉ SCIENTIFIQUE

Patrizia Donato (LMRS, Rouen)  
Olivier Goubet (LAMFA, Amiens)  
Rabah Labbas (LMAH, Le Havre)  
Taoufik Sassi (LMNO, Caen)

### COMITÉ D'ORGANISATION

Gisella Croce (LMAH, Le Havre)  
Christian Dogbe (LMNO, Caen)  
Olivier Guibé (LMRS, Rouen)

### CONFÉRENCIERS

Boris Andreianov (Besançon)  
Christophe Besse (Lille 1)  
Guillaume Carlier (Paris-Dauphine)  
Claire Chainais-Hillairet (Lille 1)  
Laurent Chupin (Clermont-Ferrand)  
Nicolas Forcadel (Paris-Dauphine)  
Daniela Giachetti (Rome-La Sapienza)  
Paola Goatin (INRIA Nice)  
Antoine Henrot (Nancy)  
Philippe Laurençot (Toulouse)  
Marc Massot (École Centrale Paris)  
Annie Raoult (Paris-Descartes)

Université du Havre  
Laboratoire de Mathématiques  
Appliquées du Havre  
UFR des Sciences et Techniques  
25, rue Philippe Lebon - BP 540  
76058 - LE HAVRE

Fédération  
Normandie-Mathématiques  
FR CNRS 3335

Fiche d'inscription sur le site WEB de la conférence  
Date limite d'inscription : 15 Octobre 2012

Site Web: <http://edp-normandie.sciencesconf.org/>  
Email: [edp-normandie@sciencesconf.org](mailto:edp-normandie@sciencesconf.org)

