Chapitre 3

La méthode des différences finies

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de l'équation de la chaleur, avec $\Omega = [0,1]$, et conditions aux bords de Dirichlet :

$$\begin{aligned} u_t - \nu u_{xx} &= 0 \text{ sur }]0,1[&& (3.1)\\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && (3.2)\\ u(x,0) &= u_0(x). && (3.3)\\ & && (3.4) \end{aligned}$$

3.1 Schéma explicite et implicite

La méthode des différences finies consiste à discrétiser l'espace $[0,1]$, en $J+1$ points, $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_j = jh$,...,$x_J = 1$, avec $h = \frac{1}{J}$. On discrétise de même l'intervalle de temps, $[0,T]$, en $N+1$ points, $t_0 = 0$, $t_1 = dt$, ...$t_n = ndt$, ...,$t_N = T$, avec $dt = \frac{T}{N}$. La méthode de différences finies nous fournira un ensemble fini de valeurs u_j^n, $0 \leq n \leq N, 0 \leq j \leq J$, approchant la fonction $u(x,t)$ aux points de coordonnées (x_j, t_n). On approche ensuite les différents termes de l'équation. Par exemple, on sait que :

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t+dt) - u(x,t)}{dt} + o(1),$$

on peut donc approcher $u_t(x_j, t_n)$ par,

$$u_t(x_j,t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt}.$$

Par ailleurs,

$$u(x+h,t) = u(x,t) + hu_x(x,t) + \frac{h^2}{2}u_{xx} + o(h^2)$$

et,

$$u(x-h,t) = u(x,t) - hu_x(x,t) + \frac{h^2}{2}u_{xx} + o(h^2),$$

donc,

$$u_{xx} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + o(1).$$

On peut donc approcher $u_{xx}(x_j, t_i)$ par :

$$u_{xx}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

On est donc amené au schéma de résolution suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

c'est à dire :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \nu \frac{dt}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \tag{3.5}$$

Ce schéma est dit explicite car connaissant les valeurs u_j^n, on peut déterminer explicitement les valeurs u_j^{n+1}. On peut également approcher la dérivée en temps d'une autre façon, en écrivant :

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x,t-dt)}{dt} + o(1),$$

on obtient :

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{dt}.$$

Cela conduit au schéma de résolution suivant,

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{dt} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

ou,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \tag{3.6}$$

c'est à dire,

$$u_j^{n+1} - \nu \frac{dt}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n.$$

Ce qui équivaut à : pour tout $j \in 1, ..., J-1$,

$$-cu_{j-1}^{n+1} - cu_{j+1}^{n+1} + (1+2c)u_j^{n+1} = u_j^n,$$

où on a posé,

$$c = \nu \frac{dt}{h^2}.$$

Cela s'écrit sous forme matricielle,

$$AU^{n+1} = U^n,$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} 1+2c & -c & 0 & & ... & 0 \\ -c & 1+2c & -c & 0 & ... & 0 \\ ... & & ... & & & \\ & & & & -c & 1+2c. \end{pmatrix}$$

Cette méthode est dite implicite car elle conduit à chaque itération à la résolution d'un systéme linéaire. On peut également choisir de résoudre une combinaison convexe des équations (3.5) et (3.6). Cela conduit à la θ-méthode,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = \theta\nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta)\nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

Lorsque $\theta = \frac{1}{2}$, on obtient le schéma dit de Crank-Nicolson.

3.2 Principe du maximum discret

Exercice

1. Dans le cas du schéma explicite, montrer que si ν, dt et h^2 vérifient la condition suivante (CFL [1]) :
$$\nu \frac{dt}{h^2} \le \frac{1}{2},$$
alors, pour tout $n \in 0, ...N$, et pour tout$j \in 0, ..., J$:
$$\min_j u_j^0 \le u_j^n \le \max u_j^0. \tag{3.7}$$

2. On suppose dans cette question que $\Omega = \mathbb{R}$. Montrer que si $\nu \frac{dt}{h^2} > \frac{1}{2}$, il existe une condition initiale u_j^0, $j \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$:
$$|u_j^n| \ \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

3. Montrer l'inégalité (3.7) dans le cas du schéma implicite.

1. C'est une condition introduite par les mathématiciens Richard Courant, Karl Friedrichs et Hans Lewy dans un article de 1928, paru dans le journal "Mathematische Annalen". Courant, Friedrichs et Lewy sont tous les trois originaires d'Allemagne. Ils ont émigré vers les Etats-Unis durant la période de la seconde guerre modiale. C'est à Courant que le célèbre Courant Institute of Mathematical Sciences (CIMS), à l'Université de New York (NYU), fondé entre autres par Courant et Friedrichs, doit son nom.

3.3 Convergence de la méthode des différences finies explicite

Lemme 1. *Soit $u(x,t)$ une solution assez régulière de* (3.4). *On pose $\tilde{u}_j^n = u(x_j, t_n)$. Alors,*

$$|\frac{\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_j^n}{dt} - \frac{\nu}{h^2}(\tilde{u}_{j+1}^n + \tilde{u}_{j-1}^n - 2\tilde{u}_j^n)| \leq C(dt + h^2). \tag{3.8}$$

où la constante C est indépendante de h, dt, j et n. On dit que le schéma explicite (3.5) *est consistant d'ordre* 1 *en temps et d'ordre* 2 *en espace.*

Démonstration. On a,

$$\frac{\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_j^n}{dt} = u_t(x_j, t_n) + \frac{1}{2}u_{tt}(x_j, t_n)dt + O(dt^2)$$

et,

$$\frac{\nu}{h^2}(\tilde{u}_{j+1}^n + \tilde{u}_{j-1}^n - 2\tilde{u}_j^n) = \nu u_{xx}(x_j, t_n) + \nu u_{xxxx}(x_j, t_n)\frac{h^2}{12} + O(h^4).$$

En sommant les deux équations et puisque u est solution de l'équation de la chaleur, le lemme est démontré. □

Remarque 1. *Si,*

$$\nu\frac{dt}{h^2} = \frac{1}{6},$$

alors le schéma est consistant d'ordre 2 *en temps et d'ordre* 4 *en espace.*

Théorème 1. *On pose $\tilde{U}^n = (\tilde{u}_0^n, ..., \tilde{u}_J^n)^t$. Soit $U^n = (u_0^n, ..., u_J^n)^t$., le vecteur construit par la méthode des différences finies explicites. Supposons que,*

$$\frac{\nu dt}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

alors il existe une constante C indépendante de h, dt, j et n, telle que,

$$\max_{n\in 0,\dots N} ||\tilde{U}^n - U^n||_\infty \leq C(dt + h^2)$$

Démonstration. Soit,

$$A = \begin{pmatrix} 1-2c & c & 0 & & \dots & 0 \\ c & 1-2c & c & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & & \\ & & & & c & 1-2c \end{pmatrix}$$

avec $c = \frac{\nu dt}{h^2}$. Alors,

$$U^{n+1} = AU^n,$$

et,

$$\tilde{U}^{n+1} = A\tilde{U}^n + dt\epsilon^n,$$

où $\epsilon^n = (\epsilon_0^n, ..., \epsilon_J^n)^t$, et $||\epsilon||_\infty \leq C(dt + h^2)$. On pose,

$$E^n = \tilde{U}^n - U^n,$$

alors,

$$E^{n+1} = AE^n + dt\epsilon^n,$$

c'est à dire que

$$E_1 = dt\epsilon^0,$$

$$E_2 = dt(A\epsilon^0 + \epsilon_1)$$

$$...$$

Et par récurrence,

$$E_{n+1} = dt(\sum_{k=0}^{n} A^{n-k}\epsilon^k).$$

Or,

$\forall k \in 0, ..., n,$ et tout vecteur V, $\quad ||A^k V||_\infty \leq ||V||_\infty$ grâce au principe du maximum discret.

Ceci implique que,

$$||E^{n+1}||_\infty \leq (n+1)dt \max_k ||\epsilon^k||_\infty \leq TC(dt + h^2).$$

□