Chapitre 4

Eléments d'analyse

4.1 Éléments d'intégration et de théorie de la mesure

4.1.1 Espaces et fonctions mesurables

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1 (Tribu)**.** *Une famille non vide $\mathcal{T}$ de parties de E est une tribu de E lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :*

i) $E \in \mathcal{T}$*;*

ii) *si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$ (stabilité par passage au complémentaire)*

iii) *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors$\bigcup_{n\in N} A_n \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable).*

Exercice 1. En déduire les propriétés suivantes :

v) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

vi) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors$\bigcap_{n\in N} A_n \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable).

vii) si A et $B \in \mathcal{T}$, $A\backslash B = A \cap B^c$ et $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) \in \mathcal{T}$.

Définition 2. *Si $\mathcal{T}$ est une tribu de E les éléments de $\mathcal{T}$ sont dits mesurables et le couple $(E, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable.*

Définition 3. *Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et soir f une application de E dans E'. L'application f est dite mesurable si pour tout $A' \in \mathcal{T}'$ $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.*

Définition 4. *Une famille non vide $\mathcal{O}$ de parties de E est une topologie sur E lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :*

(O1) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$

(O2) *Si* $U, V \in \mathcal{O}$ *alors* $U \cap V \in \mathcal{O}$.

(O3) *Si* $(U_i)_{i\in I}$ *est une famille de parties de* E *appartenant à* $\mathcal{O}$ *alors* $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Définition 5. *Si* $\mathcal{O}$ *est une topologie de* E *les éléments de* $\mathcal{O}$ *sont appelés des ouverts et le couple* $(E, \mathcal{O})$ *est appelé espace topologique.*

Définition 6. *Soient* $(E, \mathcal{O})$ *et* $(E', \mathcal{O}')$ *deux espaces topologiques et soit* f *une application de* E *dans* E'. *L'application* f *est dite continue si pour tout* $A' \in \mathcal{O}'$ $f^{-1}(A') \in \mathcal{O}$.

Définition 7. *Une distance (ou métrique) sur un ensemble* E *est une application :*

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

possédant pour tout $x, y, z \in X$ *les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Rightarrow x = y; \\ d(x, y) &= d(y, x); \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Muni de la distance d *l'espace* E *est appelé espace métrique.*

Définition 8. *On appelle boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *et on note* $B(a, r)$ *l'ensemble des points* x *dont la distance entre* a *et* x *est strictement inférieure à* r *:*

$$B(a, r) = \{x \in X, d(a, x) < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a *et de rayon* r *et on note* $B'(a, r)$ *l'ensemble des points* x *dont la distance entre* a *et* x *est inférieure ou égale à* r *:*

$$B'(a, r) = \{x \in X, d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle sphère de centre a *et de rayon* r *et on note* $S(a, r)$ *l'ensemble des points* x *dont la distance entre* a *et* x *est égale à* r *:*

$$S(a, r) = \{x \in X, d(a, x) = r\}.$$

Il existe une unique topologie sur E pour laquelle les boules ouvertes forment une base d'ouverts, c'est à dire que tout ouvert de la topologie s'écrit comme union de boules ouvertes. Il suffit de prendre comme topologie :

$$\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{O \subset E; O \text{ soit réunion de boules ouvertes.}\}$$

Exemples

– La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie engendrée par distance usuelle sur $\mathbb{R}$:$d(x, y) = |x - y|$. Il est équivalent de dire que U est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon; x + \epsilon[\subset U$.
– L'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ est l'ensemble constitué de $\mathbb{R}$ et des points $-\infty$ et $+\infty$. L'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ est naturellement muni d'une relation d'ordre total. La topologie usuelle de $\bar{\mathbb{R}}$ est la topologie engendrée par la base d'ouverts constitué des intervalles ouverts ainsi que des demi-droites ouvertes. On montre que U est un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si :
  – pour tout $x \in U \cap \mathbb{R}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$;
  – si $+\infty \in U$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]b, +\infty[\subset U$.
  – si $-\infty \in U$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $] - \infty, a[\subset U$.

Proposition 1. *Soit I une famille d'indices, et soit $\mathcal{T}_i, i \in I$ une famille de tribus de E. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.*

Proposition 2. *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties de E. Il existe une plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{S}$. C'est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{S}$. On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{S}$ et on la note $\sigma(\mathcal{S})$.*

Définition 9 (Tribu borélienne)**.** *Soit E un espace topologique, et $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de E. On appelle tribu borélienne [1] et on note $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la famille $\mathcal{O}$. Autrement dit :*

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}).$$

On appelle borélien de E tout élément de la tribu $\mathcal{B}(E)$.

Théorème 1. *La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par l'une des huit familles suivantes : $]a, b[$,...*

Théorème 2. *La tribu de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par l'une des quatre familles suivantes : $] - \infty, a[$,...*

Produit d'espaces mesurables

Définition 10 (Espace mesurable produit)**.** *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1), (E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables. On appelle produit des tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ la tribu des parties de $E_1 \times E_2$ engendrée par $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ et on la note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. Le couple $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ est appelé espace mesurable produit de $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$*

1. Émile Borel, 1871-1956, est le fils d'un pasteur protestant. Il est reçu à la fois premier à l'École polytechnique et à l'École Normale Supérieure, qu'il choisit. Il est également reçu premier à l'agrégation de mathématiques. Il est l'un parmi les pionniers de la théorie de la mesure et de son application à la théorie des probabilités. Le concept de tribu borélienne est nommé en son honneur. Engagé politiquement et résistant, il est le fondateur de l'organisme national de recherche qui deviendra plus tard le CNRS.

4.1.2 Mesures positives

Mesure positive

Définition 11 (Mesure positive)**.** *On appelle mesure positive sur l'espace mesurable* $(E, \mathcal{T})$ *toute application* μ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $[0, +\infty]$ *vérifiant :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. *pour toute suite* A_n *d'éléments de* $\mathcal{T}$ *deux à deux disjoints, on a :*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

On dit que la mesure μ *est* $\sigma - additive$ *et que le triplet* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *est un espace mesuré.*

Définition 12.

1. *Une mesure* μ *est dite finie ou bornée si* $\mu(E) < +\infty$.
2. *Une mesure* μ *est dite* σ*-finie s'il existe une suite* A_n *d'éléments de* $\mathcal{T}$ *vérifiant* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < \infty$.
3. *Une mesure* μ *sur* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ *est dite borélienne si pour tout borélien* B *de* $\mathbb{R}^N$, $\mu(B) < \infty$.

Construction de mesures

Théorème 3 (Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$)**.** *Il existe une unique mesure* σ*-finie sur* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ *qu'on appelle mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^N$ *et qu'on note* $\lambda^{(N)}$ *telle que :*

$$\lambda^{(N)}(\prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i[) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

Définition 13 (Ensembles négligeables)**.** *Soit* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit qu'une partie* N *de* E *est* μ*-négligeable s'il existe* $A \in \mathcal{T}$ *tel que* $N \subset A$ *et* $\mu(A) = 0$.

4.1.3 Intégrale de Lebesgue par rapport à une mesure positive

Nous donnons ici la constrruction de l'intégrale de Lebesgue [2] qui est celle utilisée aujourd'hui.

Fonctions étagées

On suppose l'espace E muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure positive μ.

- On désigne par $\mathcal{E}^+$, l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}^+$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-mesurables.
- On désigne par $\mathcal{M}^+$, l'ensemble des applications de E dans $[0, +\infty]$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurables.
- On désigne par $\mathcal{M}$, l'ensemble des applications de E dans $\bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurables.

Définition 14. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. L'application f est dite étagée si $f(E$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.*

Intégrale d'une fonction mesurable positive

Définition 15. *Soit $u = \sum_{i=1^n} a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^+$; on appelle intégrale de u sur E par rapport μ et on note $\int_E u d\mu$ la somme :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

Définition 16. *Soit $f \in \mathcal{M}^+$; on appelle intégrale de f sur E par rapport à μ et on note $\int_E f d\mu$ l'élément de $[0, +\infty[$ suivant :*

$$\sup \int_E u d\mu; u \in \mathcal{E}^+, u \leq f$$

Définition 17. *Soit $f \in \mathcal{M}^+$; on dit que f est μ-intégrable sur E si l'intégrale $\int_E f d\mu$ est finie.*

2. Henri Lebesgue, 1875-1941, est un mathématicien français. Son principal apport est la définition de l'intégrale que nous voyons ici et qui généralise l'intégrale de Riemman. Une des lacunes de l'intégrale de Riemann, réside dans le fait que certaines fonctions définies sur un compact ne possèdent pas d'intégrale. L'idée de Lebesgue est de remplacer les fonctions continues par morceaux par les fonctions étagées. Son travail sur la théorie de 'lintégration est apparu dans cinq notes des comptes rendus de l'académie des sciences (CRAS). L'ensemble de son travail apparait dans sa thèse intitulée « Intégrale, longueur, aire », publiée en 1902 dans « Annali di Matematica ».

Intégrale d'une fonction mesurable réelle de signe quelconque

Pour une fonction $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, on définit :
- $f^+ = \max(f, 0)$
- $f^- = -\min(f, 0)$.

Définition 18. *Soit $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est μ-intégrable sur E si f^+ et f^- sont μ-intégrables sur E. Dans ce cas, on appelle int égrale de f par rapport à la mesure μ et on note $\int_E f d\mu$ le réel $\int_E f^+ d\mu$-$\int_E f^- d\mu$*

Intégrale d'une fonction mesurable à valeur complexe

Soit $f = u + iv$. La fonction f est dite μ intégrable si lf est mesurable et $\int_E |f| d\mu < +\infty$. Dans ce cas , on pose :

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$$

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 4 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)**.** *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit f_n une suite de fonctions complexes $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{C}})$-mesurables telle que :*

i *pour μ- presque tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,*

ii *il existe une fonction positive g, $\mu-$intégrable sur E telle que :*

$$|f_n(x)| \leq g(x)\mu - p.p.$$

Alors la fonction f est μ intégrable et on a :

$$\lim_{n\to} \int_E |f_n - f| d\mu = 0 \textit{ et } \lim_{n\to} \int_E f_n d\mu = \lim_{n\to} \int_E f d\mu.$$

Fonctions définies par des intégrales

Soit V un espace métrique et soit :

$$\begin{array}{rcl} f : E \times V & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t). \end{array}$$

Continuité

Théorème 5. *Soit $t_0 \in V$. On suppose que :*

1. *Pour tout $t \in V$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$ mesurable ;*
2. *pour μ-presque tout $x \in E$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue au point t_0.*
3. *Il existe un voisinage U de t_0 dans V et une fonction $g\mu-$ intégrable tels que pour tout $t \in U$ et $\mu-$presque tout $x \in E$,*

$$f(x,t)| \leq g(x).$$

Alors la fonction $F : t \mapsto \int_E f(x,t)d\mu$ est continue en t_0.

Dérivabilité

Théorème 6. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$,et $(f : E \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}$. On suppose que :*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$-mesurable et il existe $t_0 \in I$ telle que $x \mapsto f(x,t_0)$ soit $\mu-$intégrable ;*
2. *pour tout $x \in E$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.*
3. *pour tout compact K inclus dans I, il existe une fonction $g_K\mu-$ intégrable telle que pour tout $t \in K$ et $\mu-$presque tout $x \in E$,*

$$|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq g_K(x).$$

Alors pour tout $t \in I$, les fonctions $x \mapsto f(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ sont $\mu-$intégrables et, la fonction $F : t \mapsto \int_E f(x,t)d\mu$ est dérivable sur I et on a pour tout $t \ inI$:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)|d\mu.$$

Théorème de Fubini

Théorème du changement de variable

4.2 Les espaces de Hilbert

Définition 19. *Un sous-ensemble O d'un espace métrique E est ouvert si pour tout élément x appartenant à O, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Définition 20. *Un sous-ensemble F d'un espace métrique E est fermé si son complémentaire dans E est ouvert.*

Proposition 3. *Un sous-ensemble F d'un espace métrique est fermé si et seulement si pour toute suite d'éléments de F convergeant vesr x, $x \in F$.*

Définition 21. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si elle vérifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N, \quad n, p > N \Rightarrow d(x_n, x_p) < \epsilon.$$

Définition 22. *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy converge.*

Définition 23. *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel* E *est une application* $(f|g)$ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

– *elle est bilinéaire, c'est à dire que pour tout réel* λ *et pour tout* f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 *dans* E*, on a :*
$$(\lambda f|g) = \lambda(f|g) = (f|\lambda g),$$
$$(f_1 + f_2|g) = (f_1|g) + (f_2|g),$$
$$(f, g_1|g_2) = (f|g_1) + (f|g_2)$$
– *elle est symétrique,*
$$(f|g) = (g|f)$$
– *elle est définie positive,*
$$(f|f) > 0 \text{ dès que } f \neq 0.$$

Définition 24. *Une norme sur un espace vectoriel* E *est une application* $||\;||$ *de* E *dans* $\mathbb{R}+$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

–
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad ||\lambda f|| = |\lambda| ||f||,$$
–
$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||,$$
–
$$||f|| = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.** *Soit* $\mathcal{N}(f) = (f|f)^{\frac{1}{2}}$*. Pour tout* $f, g \in E$*, on a,*
$$(f|g) \leq \mathcal{N}(f)\mathcal{N}(g).$$
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ *tel que,*
$$x = \lambda y$$

Démonstration. On étudie,
$$P(t) = (x + ty|x + ty).$$
□

Proposition 5. *L'application $\sqrt{(f|f)}$ de E dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E. C'est la norme associée au produit scalaire $(f|g)$.*

Exercice 2. Démontrer la proposition 5.
Correction
Pour l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}||f+g||^2 &= ||f||^2 + ||g||^2 + 2(f|g) \\ &\leq ||f||^2 + ||g||^2 + 2||f||||g|| \\ &= (||f|| + ||g||)^2\end{aligned}$$

Définition 25. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien. Un espace préhilbertien complet pour la norme associé à son produit scalaire est un espace de Hilbert.*

Définition 26. *Deux éléments d'un espace de Hilbert sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.*

Dans tout ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert réel et $(.|.)$ son produit scalaire.

Définition 27. *Un sous-ensemble K de H est dit convexe, si pour tout $x, y \in E$, et pour tout réel $\theta \in [0,1]$, l'élément $\theta x + (1-\theta)y$ est dans K.*

Exercice 3. Démontrer l'inégalité du parallélogramme :

$$\frac{1}{2}||a+b||^2 + \frac{1}{2}||a-b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2. \tag{4.1}$$

Théorème 7 (Projection sur un convexe)**.** *Soit H un espace de Hilbert. Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Pour tout x dans H, il existe un unique $x_k \in K$ tel que,*

$$||x - x_k|| = \inf_{y \in K} ||x - y||. \tag{4.2}$$

De façon équivalente, x_K est caractérisé par la propriété suivante :

$$x_k \in K \text{ et } \quad (x_K - x|x_K - y) \leq 0 \quad \forall y \in K. \tag{4.3}$$

On appelle x_K la projection orthogonale de x sur K.

Démonstration. Soit $y_n \in K$ une suite minimisante de $||x-y||$. C'est à dire que :

$$d = \lim_{n \to +\infty} ||x - y_n|| = \inf_{y \in K} ||x - y||.$$

On pose $d_n = ||x - y_n||$. On va montrer que y_n est une suite de Cauchy dans H. En utilisant (1.1) avec $a = y_n - x$ et $b = y_p - x$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
||y_n - y_p||^2 =& 2(||y_n - x||^2 + ||x - y_p||^2) - ||y_n + y_p - 2x||^2 \\
=& 2(||y_n - x||^2 + ||x - y_p||^2) - 4||\frac{y_n + y_p}{2} - x||^2 \\
=& 2d_n^2 + 2d_p^2 - 4||\frac{y_n + y_p}{2} - x||^2.
\end{aligned}$$

Or puisque K est convexe, $\frac{y_n+y_p}{2} \in K$ et donc,

$$d \leq ||\frac{y_n + y_p}{2} - x||^2.$$

Ce qui implique,

$$||y_n - y_p||^2 \leq 2d_n^2 + 2d_p^2 - 4d.$$

Ceci montre que y_n est une suite de Cauchy. Or H est complet, donc la suite converge. Et K est fermé donc la limite appartient à K. Soit x_K cette limite, alors x_K vérifie l'équation (1.2). Supposons qu'il existe deux points x_1 et x_2 vérifiant (1.2), alors,

$$\begin{aligned}
||x_1 - x_2||^2 &= 2||x - x_1||^2 + 2||x - x_2||^2 - 4||\frac{x_1 + x_2}{2} - x||^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Donc $x_1 = x_2$.
On montre maintenant (1.3). Puisque K est convexe, pour tout $x, y \in K$, pour tout $\theta \in [0,1]$, $\theta x + (1-\theta)y \in K$. En particulier, pour tout $y \in K$ et $\theta \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}
||x - x_K||^2 &\leq ||x - (x_K + \theta(y - x_K))||^2 \\
&\leq ||x - x_K||^2 + \theta^2||y - x_K||^2 - 2\theta(x - x_K|y - x_K),
\end{aligned}$$

donc,

$$(x - x_K|y - x_K) \leq \frac{\theta}{2}||y - x_K||^2.$$

Par passage à la limite quand θ tend vers 0, on obtient (1.3). Réciproquement, si x_K vérifie (1.3), alors,

$$\begin{aligned}
||x - y||^2 &= ||x - x_K||^2 + ||x_K - y||^2 + 2(x - x_K|x_K - y) \\
&\geq ||x - x_K||^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 4. Montrer que :

$$||P_k(x) - P_k(y)|| \leq ||x - y||$$

Correction

$$\begin{aligned}
||x-y||^2 =&(x - P_K(x) + P_K(y) - y + P_K(x) - P_K(y), x - P_K(x) + P_K(y) - y + P_K(x) - \\
&P_K(y)) \\
=&||x - P_K(x) + P_K(y) - y||^2 + ||P_K(x) - P_K(y)||^2 \\
&+ 2(x - P_K(x) + P_K(y) - y, P_K(x) - P_K(y)) \\
=&||x - P_K(x) + P_K(y) - y||^2 + ||P_K(x) - P_K(y)||^2 + 2(x - P_K(x), P_K(x) - P_K(y)) \\
&+ 2(P_K(y) - y, P_K(x) - P_K(y)) \\
\geq&||P_K(x) - P_K(y)||^2.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Supposons que K est un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que dans ce cas, x_k est caractérisé par :

$$(x - x_K, z) = 0 \quad \forall z \in K$$

et que P_k est une application linéaire.

Définition 28. *Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$, on appelle base hibertienne de H une famille dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H qui est orthonormale pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans H.*

Proposition 6. *Soit H un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Pour tout élément x de H, il existe une unique suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la somme partielle $\sum_{n=0}^{p} x_n e_n$ converge vers x quand p tend vers $+\infty$. Cette suite est définie par $x_n = (x, e_n)$ et on a,*

$$||x||^2 = (x, x) = \sum_{n\geq 0} |(x, e_n)|^2.$$

On écrit alors,

$$x = \sum_{n\geq 0} x_n e_n.$$

Démonstration. **Existence**
Par définition de la densité, pour tout $x \in H$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe y combinaison linéaire finie des e_n tel que,

$$||x - y|| \leq \epsilon.$$

Grâce au théorème 7, on peut définir une application linéaire S_p qui a tout point $z \in H$, fait correspondre $S_p z$, la projection orthogonale de z sur H_p, l'espace vectoriel engendré par les $p+1$ premiers vecteurs $(e_n)_{0 \leq n \leq p}$. Alors $z - S_p z$ est orthogonal à H_p, et en particulier à $S_p z$. On en déduit que,

$$||z||^2 = ||z - S_p z||^2 + ||S_p z||^2 \tag{4.4}$$

et donc que,

$$||z|| \geq ||S_p z||.$$

Or puisque $S_p z = \sum_{k=0}^{p} a_k e_k$, on a,

$$\begin{aligned} (z - S_p z, e_k) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (z, e_k) = (S_p z, e_k) \\ &\Rightarrow \quad (z, e_k) = (a_k e_k, e_k) \\ &\Rightarrow \quad (z, e_k) = a_k. \end{aligned}$$

d'où,

$$S_p z = \sum_{k=0}^{p} (z, e_k) e_k.$$

Puisque y est une combinaison linéaire finie des $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour p suffisamment grand $S_p y = y$. Donc,

$$||S_p x - x|| \leq ||S_p(x - y)|| + ||y - x|| \leq 2\epsilon.$$

On en déduit que,

$$\lim_{p \to +\infty} S_p x = x,$$

et en utilisant (1.4) que,

$$\lim_{p \to +\infty} ||S_p x||^2 = ||x||^2.$$

Unicité
Supposons qu'il existe deux suites distinctes (x_{1n}) et (x_{2n}) telles que :

$$\sum_{n=0}^{p} x_{1n} e_n \text{ et } \sum_{n=0}^{p} x_{2n} \text{ convergent vers } x.$$

Soit i tel que $x_i^1 \neq x_i^2$. Alors, pour tout $p \geq i$, on a,

$$|| \sum_{n=0}^{p} x_{1n} e_n - \sum_{n=0}^{p} x_{2n} e_n ||^2 = \sum_{n=0}^{p} (x_{1n} - x_{2n})^2 \geq (x_{1i} - x_{2i})^2.$$

Or pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N$, tel que $p > N$ implique,

$$\begin{aligned}||\sum_{n=0}^{p} x_{1n}e_n - \sum_{n=0}^{p} x_{2n}e_n|| &\leq ||\sum_{n=0}^{p} x_{1n}e_n - x|| + ||x - \sum_{n=0}^{p} x_{2n}e_n|| \\ &\leq 2\epsilon.\end{aligned}$$

On obtient donc une contradiction.

□

Proposition 7. *Soit H un espace de Hilbert séparable, c'est à dire qu'il existe une famille dénombrable dense dans H. Alors il existe une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. On utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. □

Proposition 8. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $v_1, v_2, ..., v_N$ une famille d'éléments de H linéairement indépendante. Alors il existe une famille orthonormale $u_1, u_2, ..., u_N$ telle que pour tout i vérifiant $0 \leq i \leq N$, on ait :*

$$vect\{v_0, v_1, ..., v_i\} = vect\{u_0, u_1, ..., u_i\}.$$

Démonstration. On pose :

$$u_0 = \frac{v_0}{||v_0||.}$$

Puis, suppposant $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ construits, on cherche :

$$\tilde{u}_n = v_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k$$

tel que pour tout $j \in 0, .., n-1$

$$< \tilde{u}_n, q_j >= 0.$$

Cela donne pour tout $j \in 1, ..n-1$,

$$< v_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k, u_j >= 0$$

On en déduit que :

$$\alpha_j = - < v_n, u_j. >$$

C'est à dire :

$$\tilde{u}_n = v_n - \sum_{k=0}^{n-1} < v_n, u_k > u_k.$$

Enfin on pose :

$$u_n = \frac{\tilde{u}_n}{||\tilde{u}_n||}$$

□

Définition 29. *Soient H et G deux espaces de Hilbert. Une application linéaire de H dans G est dite continue s'il existe une constante C telle que,*

$$||Ax||_G \leq |C|x||_H \quad \forall x \in H.$$

La norme de A est alors définie par,

$$||A|| = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{||Ax||_G}{||x||_H}.$$

Définition 30. *Soit H un espace de Hilbert réel. Son dual H' est l'ensemble des formes linéaires continues sur H, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires continues de H dans $\mathbb{R}$. Par définition, la norme d'un élément f de H' est donné par,*

$$||f|| = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||_H}.$$

Théorème 8 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert, et H' son dual. Pour toute forme linéaire continue $L \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que,*

$$L(x) = (y, x) \quad \forall x \in H. \tag{4.5}$$

De plus, on a $||L||_{H'} = ||y||_H$.

Démonstration. Soit $M = \ker L$.Comme L est continue, il s'agit d'un sous-espace fermé de H. Si $M = H$ alors $y = 0$. Sinon, soit $z \in M^c$ et z_M sa projection orthogonale sur M. Soit $z_0 = \frac{z - z_M}{||z - z_M||}$. Pour tout $x \in H$, on pose :

$$w_x = x - \frac{L(x)}{L(z_0)} z_0.$$

Alors $L(w_x) = 0$, c'est à dire que $w_x \in M$. On a :

$$x = w_x + \lambda z_0 \text{ avec } \lambda = \frac{L(x)}{L(z_0)}.$$

On en déduit que :

$$H = vect z_0 \oplus M.$$

En effet, $vect z_0 \oplus M = 0$ car $z_0 \notin M$. On a,

$$L(x) = \lambda L(z_0) \text{ et } (x, z_0) = \lambda.$$

Donc,

$$L(x) = (x, z_0)L(z_0) = (L(z_0)z_0, x).$$

On pose alors,

$$y = L(z_0)z_0.$$

Soit y_1 et y_2 vérifiant (1.5). Alors,

$$0 = L(x) - L(x) = (y_1 - y_2, x) \forall x \in H.$$

Donc pour $x = (y_1 - y_2)$, on obtient,

$$||y_1 - y_2||^2 = 0.$$

Donc,

$$y_1 = y_2.$$

Enfin,

$$||L||_{H'} = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|L(x)|}{||x||_H} = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|(y, x)|}{||x||_H}$$

Or,

$$\frac{|(y, x)|}{||x||_H} \leq \frac{||y|| ||x||}{||x||} = ||y||$$

Donc,

$$||L||_{H'} = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|L(x)|}{||x||} = ||y||$$

□

Exercice 6. Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue,

ii) pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E,

iii) pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé de E.

Exercice 7. Montrer qu'une application linéaire A d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F est continue si et seulement si, il existe une constante K telle que pour tout $x \in E$:

$$||Ax||_F \leq K||x||_E$$

Exercice 8. Soit $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$. Déterminer $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1, x_2) = (y, x)$ où ($x = (x_1, x_2)$). Retrouver la valeur de y en procédant comme dans la démonstration du théorème 8.

4.3 Les espaces de Sobolev

4.3.1 Les espaces L^p

Définition 31. *On dit que deux nombres positifs p, q sont exposants conjugués s'ils vérifient :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cela entraine que $0 < p < \infty$ et $0 < q < \infty$. Lorsque p tend vers 1, q tend vers $+\infty$. Ainsi, on dit également que 1 et $+\infty$ sont des exposants conjugués.

Dans la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue. La plupart des résultats sont valables dans un espace mesuré muni d'une mesure positive. Puisque notre objectif est l'application des théories dans le cas de l'analyse des équations aux dérivées partielles nous ne traiterons que le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour une présentation plus générale consulter par exemple la référence classique [**?**].

Théorème 9. *Soient p et q des exposants conjugués avec $1 < p < +\infty$. Soient f et g des fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[0, +\infty]$. On a :*

$$\int_\Omega fg dx \leq (\int_\Omega f^p)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega g^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.6}$$

et,

$$(\int_\Omega (f+g)^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_\Omega f^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_\Omega g^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.7}$$

Démonstration. On pose :

$$A = (\int_\Omega f^p dx)^{\frac{1}{p}}, B = (\int_\Omega f^q dx)^{\frac{1}{q}},$$

et :

$$F(x) = \frac{f(x)}{A}, G(x) = \frac{g(x)}{B}.$$

On peut remarquer que :

$$\int_\Omega F^p dx = \int_\Omega G^q dx = 1.$$

On va montrer que :

$$\int_\Omega F(x)G(x) dx \leq 1.$$

Soient s et t tels que :

$$F(x) = e^{\frac{s}{p}}, G(x) = e^{\frac{t}{q}}.$$

Alors, puisque la fonction exponentielle est convexe, on a :

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}e^s + \frac{1}{q}e^t = \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q.$$

On en déduit l'inégalité (1.6) par intégration. Pour démontrer l'inégalité (1.7), on écrit :

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

Par application de l'inégalité de Holder, on obtient :

$$\int_\Omega f(f+g)^{p-1}dx \leq (\int_\Omega f^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega (f+g)^{(p-1)q} dx)^{\frac{1}{q}}$$

Puisque $(p-1)q = p$, on obtient :

$$\int_\Omega f(f+g)^{p-1}dx \leq (\int_\Omega f^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega (f+g)^p dx)^{\frac{1}{q}}$$

et de même :

$$\int_\Omega g(f+g)^{p-1}dx \leq (\int_\Omega g^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega (f+g)^p dx)^{\frac{1}{q}}$$

D'où le résultat en sommant les deux inégalités précédentes et en divisant par $(\int_\Omega (f+g)^p dx)^{\frac{1}{q}}$. □

On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire,

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note,

$$||f||_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega f(x)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

ou simplement $||f||$ s'il n'y a pas d'ambiguité, la norme associée.
Les fonctions mesurables sont définies presque partout dans Ω. c'est à dire que l'on ne change pas la valeur d'une fonction mesurable f, si l'on ne change ses valeurs que sur un sous ensemble de mesure nulle.

Définition 32. *Pour $0 < p < \infty$, et toute fonction mesurable réelle définie sur Ω, on pose :*

$$||f||_p = \{\int_\Omega |f|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

et on appelle $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions pour lesquelles :

$$||f||_p < +\infty$$

Définition 33. *Supposons $g : \Omega \to [0, +\infty]$ mesurable. Soit S l'ensemble de tous les nombres réels α tels que*

$$\lambda(g^{-1}(]\alpha; +\infty]))) = 0.$$

Pour $S = \emptyset$, posons $\beta = +\infty$. Pour $S \neq \emptyset$, posons $\beta = \inf S$. Puisque :

$$g^{-1}(]\beta, \infty]) = \cup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(\beta + \frac{1}{n}, \infty])$$

et puisque la réunion d'une famille dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle, on a $\beta \in S$. On appelle β la borne supérieure essentielle de g. Pour une fonction mesurable sur Ω définie $\mathbb{R}$ on définit $||f||_\infty$ comme étant la borne supérieure essentielle de $|f|$, et $L^\infty(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

Théorème 10. *Soient p et q des exposants conjugués avec $1 \leq p \leq +\infty$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :*

$$||fg_1|| \leq ||f||_p ||g||_q. \tag{4.8}$$

Théorème 11. *Soient $1 \leq p \leq +\infty$, $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et on a :*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \tag{4.9}$$

Démonstration. Oour $1 < p < \infty$, il s'agit de l'inégalité de Minkowski. Pour $p = 1$, cela vient du fait que $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour $p = \infty$, on revient à la définition de la borne supérieure essentielle. Soit S_1 l'ensemble de tous les nombres réels α tels que $\lambda(|f + g|^{-1}(]\alpha; +\infty]))) = 0$ et S_2 l'ensemble de tous les nombres réels α tels que $\lambda((|f| + |g|)^{-1}(]\alpha; +\infty]))) = 0$. Puisque $lf + g| \leq |f| + |g|$, on en déduit que : $S_2 \subset S_1$. Ce qui implique, $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ (car $||f||_\infty + ||g||_\infty \in S_2$) . □

On voit que pour l'application $||f||_p$ soit une norme sur L^p il manque que $||f||_p = 0 \Rightarrow f = 0$. Ceci n'est pas le cas, puisque $||f||_p = 0 \Rightarrow f = 0 p.p.$ Pour remédier à cela, on va considérer les classes d'équivalences dans L^p pour la relation $fRg \Leftrightarrow f = g p.p.$ De cette manière, L^p est un espace vectoriel normé. On alors le résultat suivant :

Théorème 12. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé complet.*

Démonstration. On considère d'abord le cas où $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p. Il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $n_1 < n_2 < ....$ telle que :

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 2^{-k}, k = 1, 2....$$

On pose :

$$g_i = \sum_{k=1}^{i} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

D'après l'inégalité de Minkowski, $||g_i||_p < 1$ pour $i = 1, 2, ...$ Par application du lemme de Fatou $(g_i^p)_{i\in\mathbb{N}}$, on a $||g||_p \leq 1$. En particulier, $g(x) < \infty$ presque partout. On pose :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

lorsque la série du membre de droite converge et 0 dans le cas contraire. On otient :

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k} p.p.$$

Il faut maintenant démontrer que f est la limite de f_n au sens L^p.
Soit $\epsilon > 0$, il existe N tel que $||f_n - f_p|| < \epsilon$ dès que $n, p > N$. Pour tout $m > N$, le lemme de Fatou montre que :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p dx \leq \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |f_{n_k} - f_m|^p dx \leq \epsilon^p \tag{4.10}$$

On en déduit que $f - f_m \in L^p$, $f \in L^p$ et finalement $||f - f_m||_p \to 0$ quand m tend vers $+\infty$. Ce qui achève la démonstration pour $1 \leq p < +\infty$. □

Théorème 13. *Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est à dire que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que,*

$$\lim_{n\to+\infty} ||f - f_n||_p = 0.$$

Pour démontrer ce théorème, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit S l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs réelles, définies sur Ω et telles que*

$$\lambda(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, S est dense dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. On a $S \subset L^p$. On suppose $f \geq 0$, $f \in L^p$, on définit s_n de la manière suivante. Soit $\delta_n = 2^{-n}$ et pour $t \geq 0$, on pose $\varphi_n(t) = k$ oùk vérifie $t = k\delta_n + r$, $k\ in\mathbb{N}$ et $0 \leq r < \delta_n$. Puis $s_n = \varphi_n \circ f$. Alors $s_n \in S$, $lf - s_n|^p \leq f^p$ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre que $||f - f_n||_p$ tend vers zéro. Le cas général se déduit de ce cas particulier. □

Démonstration du théorème. On définit S comme précédemment. Pour $1 \leq p < \infty$. Pour $s \in S$ et $\epsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $g = s$ sauf sur un ensemble de mesure inférieur à ϵ, et $|g| \leq ||g||_\infty$ (théorème de Lusin). D'où :

$$||g - s||_p < 2\epsilon^{\frac{1}{p}}||s||_{infty}.$$

Comme s est dense dans L^p ceci achève la démonstration. □

Corollaire 1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a,*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω.

Démonstration. Soit f_n une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^2(\Omega)$, alors,

$$0 = \int_\Omega f\phi_n dx.$$

Or,

$$\begin{aligned} |\int_\Omega f\phi_n dx - ||f||^2| &= |\int_\Omega f(f - f + \phi_n)dx - ||f||^2| \\ &= |\int_\Omega f(\phi_n - f)dx| \qquad \leq ||f||||\phi_n - f|| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Donc $f = 0$ presque partout dans Ω. □

Plus généralement, on peut définir les espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables dont la puissance $p$iéme est intégrable. C'est un espace de Banach pour la norme,

$$||f||_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega f(x)^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

L^∞ est l'espace des fonctions mesurables f essentiellement bornées, c'esta é dire qu'il existe une constante C telle que, $|f(x)| \leq C$ presque partout dans Ω. Muni de la norme,

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \in \mathbb{R} \text{ tel que } |f(x)| \leq Cp.p \text{ dans } \Omega\},$$

L^∞ est un espace de Banach. Par ailleurs, si Ω est un borné, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dès que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

4.3.2 Rappel sur la théorie des distributions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. On rappelle que le support d'une fonction réelle continue est l'adhérence de l'ensemble des points où cette fonction ne s'annule pas. On munit $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une pseudo-topologie, c'est à dire qu'on définit une notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 34. *On dit qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si,*

1. *le support de ϕ_n reste dans un compact $K \subset \Omega$.*
2. *pour tout multi-indice α, $\partial^\alpha \phi_n$ converge uniformêment vers $\partial^\alpha \phi$ dans K.*

On définit alors l'espace des distributions comme l'espace “dual” de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ “continues” sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 35. *Une distribution sur $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ qui vérifie,*

$$\lim_{n\to+\infty} T(\phi_n) = T(\phi)$$

pour toute suite ϕ_n convergeant vers ϕ au sens de la pseudo-topolgie définie plus haut. On note $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions.

Définition 36. *Pout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par,*

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi >= - < T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} > \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Distributions et espaces $L^p(\Omega)$

Exercice 9. Vérifier que si f est localement intégrable alors l'application linéaire T_f définie par,

$$< T_f, \phi >= \int_\Omega f\phi dx,$$

est une distribution. Dans ce cas on identifie T_f et f.

4.3.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 37. *Soit Ω un ouvert régulier de R^N. On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ par :*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2(\Omega) \forall i \in \{1, ..., N\}\}$$

oùc les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i} u$ sont prises au sens des distributions.

Proposition 9. *Muni du produit scalaire,*

$$(f,g) = \int_\Omega fg dx + \int_\Omega \nabla f \nabla g dx,$$

et de la norme associée,

$$||f||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega f^2 dx + \int_\Omega |\nabla f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. L'application (f,g) définit bien un produit scalaire dans H^1. Il faut maintenant montrer que l'espace est complet. Soit u_n une suite de Cauchy dans H^1. Alors les suites u_n et $\frac{\partial}{\partial x_i}u_n$ sont des suites de Cauchy dans L^2. Or L^2 est complet donc, il existe u et w_i telles que u_n et $\frac{\partial}{\partial x_i}u_n$ convergent vers u et w_i dans L^2. Or pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} u_n \phi = -\int_\Omega u_n \frac{\partial}{\partial x_i}\phi,$$

donc par passage à la limite,

$$\int_\Omega w_i \phi = -\int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_i}\phi,$$

ce qui montre que,

$$w_i = \frac{\partial}{\partial x_i} u$$

au sens des distributions. Et alors u_n tend vers u dans H^1 ce qui achève la démonstration.

□

Proposition 10. *Soit v une fonction de $H^1(\Omega)$. On suppose que $\forall i \in \{1, ..., N\}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} v = 0$ alors pour chaque composante connexe de Ω il existe une constante C telle que $v = C$.*

Démonstration. On a :

$$v\frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{4.11}$$

Soit :

$$Q =]-l, l[\subset \Omega$$

et $\theta(t) \in \mathcal{D}(]-l,l[)$ avec

$$\int -l^l \theta(t) dt = 1.$$

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit :

$$\psi(x', x_i) = \int_{-l}^{x_i} \left(\theta(t) \int_{-l}^{l} \phi(x', s) ds - \phi(x', t) \right) dt.$$

Avec $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. On vérifie que $psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x', x_i) = \theta(x_i) \int_{-l}^{l} \phi(x', s) ds - \phi(x', x_i).$$

Alors on déduit de (1.11) que :

$$\int_{\Omega} v(\theta(x_i) \int_{-l}^{l} \phi(x', s) ds - \phi(x', x_i)) dx' dx_i = 0.$$

Puis par application du théorème de Fubini que :

$$\int_{\Omega} v\phi dx = \int_{\Omega} \phi(x', s) \int_{-l}^{l} v(x', x_i) \theta(x_i) dx_i ds.$$

On en déduit que :

$$v = \int_{-l}^{l} v(x', x_i) \theta(x_i) dx_i.$$

Cela montre que v ne dépend pas de x_i. En renouvelant le raisonnemant pour chacune des variables, on en déduit que v est cpnstante sur Q, puis sur chaque composante connexe. $\square$

Proposition 11. *On suppose que* $N = 1$*. Alors, toute fonction* v *de* $H^1(0,1)$ *est continue sur* $[0,1]$*. De plus, pour tout* $x, y \in [0,1]$ *, on a,*

$$v(y) - v(x) = \int_{x}^{y} v'(t) dt,$$

et l'application qui à $v \in H^1(0,1)$ *associe* $v(x) \in \mathbb{R}$ *est une forme linéaire continue.*

Démonstration. Soit,

$$w(x) = \int_{0}^{x} v'(s) ds.$$

Cette définition a bien un sens puisque,

$$\begin{aligned} |w(x)| &= |\int_{0}^{x} v'(s) ds| \\ &\leq ||v'||_{L^2(\Omega)} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

De même w est continue sur $[0, 1]$ car,

$$\begin{aligned}|w(y) - w(x)| &= |\int_x^y v'(s)ds| \\ &\leq ||v'||_{L^2(\Omega)} \sqrt{|y - x|}.\end{aligned}$$

On veut maintenant montrer que $w = v$ p.p. On montre d'abord que $w' = v'$ p.p. Par définition de w' au sens des distributions, on a,

$$\int_0^1 w'\phi = -\int_0^1 w\phi'.$$

Calculons $\int_0^1 w\phi'$. On a,

$$\begin{aligned}\int_0^1 w\phi' &= \int_0^1 (\int_0^x v'(s)ds)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 (\int_0^1 v'(s)\chi(0 \leq s \leq x \leq 1)ds)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (v'(s)\phi'(x)\chi(0 \leq s \leq x))dsdx \text{ d'aprés le théorème de Fubini,} \\ &= \int_0^1 v'(s)(\int_0^1 \phi'(x)\chi(s \leq x)dx)ds \\ &= -\int_0^1 v'(s)\phi(s)ds\end{aligned}$$

Finalement,

$$-\int_0^1 w\phi' = \int_0^1 v'(s)\phi(s)ds$$

donc,

$$w' = v'.$$

D'aprés le lemme 10 ceci implique que,

$$v(x) = \int_0^x v'(s)ds + v(0),$$

ou encore,

$$v(x) = \int_y^x v'(s)ds + v(y).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
|v(x)| &= |\int_x^y v'(s)ds + v(y)| \\
&\leq ||v'||_{L^2(\Omega)} + v(y) \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,} \\
&\leq ||v'||_{L^2(\Omega)} + \int_0^1 v(y)dy \text{ en intégrant par rapport à} y, \\
&\leq ||v'||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)} \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,} \\
&\leq \sqrt{2}||v||_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

4.3.4 Exercices

Exercice 10. Pour quelles valeurs de α, la fonction $|x|^\alpha$ appartient-elle à $H^1(0,1)$?
Exercice 11. Vérifier que $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ ainsi défini est une distribution.
Exercice 12. Vérifier que si f est une fonction dérivable, dont la dérivée est intégrable alors la définition de la dérivation au sens des distributions coincide avec la définition de la dérivée usuelle.
Exercice 13. Soit Ω un ouvert borné. Soit f une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ et C^1 par morceaux. Montrer que f est dans $H^1(\Omega)$.
Exercice 14. Soit f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la dérivée de f au sens des distributions. La fonction f appartient elle à $H^1(0,1)$?
Exercice 15.
Soit f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Quel est le support de $g(x) = f(x) - f(1-x)$?
3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Quel est le support de h définie sur $\mathbb{R}^n$ par $h(x) = f(r^2 - |x-a|^2)$?

Exercice 16. On suppose que $N = 2$. Soit,

$$f(x) = |\ln(|x|)|^{\alpha}.$$

Montrer que pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $f \in H^1(B(0,1))$. On suppose que $N = 3$. Soit,

$$f(x) = |x|^{-\beta}.$$

Montrer que pour $0 < \beta < \frac{N-2}{2}$, $f \in H^1(B(0,1))$.

Théorème 14. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 ou encore $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ ou encore $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

4.3.5 L'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$

Définition 38. *L'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Proposition 12. *Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Toute suite de cauchy de $H^1_0(\Omega)$ converge dans $H^1(\Omega)$ car $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Or par définition $H^1_0(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Donc toute suite de cauchy de $H^1_0(\Omega)$ converge dans $H^1_0(\Omega)$. □

Proposition 13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction d'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H^1_0(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Démonstration. On commence par démontrer le résultat dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on procéde ensuite par densité. On suppose que si $x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega$ alors $-\infty \leq a \leq x_1 \leq b \leq +\infty$. Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors en prolongeant v par 0 en dehors de Ω, on peut écrire :

$$v(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} v(t, x_2, ..., x_N) dt \text{ car } v(a) = 0.$$

Alors,

$$|v(x)|^2 \leq (b-a) \int_a^b \big(\frac{\partial}{\partial x_1} v(t, x_2, ..., x_N)\big)^2 dt.$$

En intégrant sur Ω, on obtient alors,

$$\begin{aligned} ||v(x)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq (b-a)\int_\Omega \int_a^b \big(\frac{\partial}{\partial x_1} v(t, x_2, ..., x_N)\big)^2 dt dx \\ &\leq (b-a)\int_a^b \int_\Omega \big(\frac{\partial}{\partial x_1} v(t, x_2, ..., x_N)\big)^2 dx dt \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \big(\frac{\partial}{\partial x_1} v(t, x_2, ..., x_N)\big)^2 dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega ||\nabla v||^2 dx. \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat pour toute fonction v de $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit maintenant une fonction $v \in H^1_0(\Omega)$. Par définition, il existe une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que,

$$\lim_{n \to +\infty} ||v - v_n||_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Or pour tout n,

$$\int_\Omega |v_n(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2 dx.$$

Par passage é la limite, on obtient le résultat souhaité. □

Proposition 14. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction, alors la semi-norme défininie sur H^1_0,*

$$|v|_{H^1_0(\Omega)} = \big(\int_\Omega |\nabla|^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme équivalente é la norme usuelle.

Démonstration. Dans un sens c'est évident et dans l'autre sens on utilise l'inégalité de Poincaré. □

4.3.6 Traces et formules de Green

Théorème 15. *Soit Ω un ouvert de classe C^1 ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0 de la maniére suivante :*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : & H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mapsto L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\partial\Omega) \\ & v \mapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application linéaire se prolonge par continuité en une aplication linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ encore notée γ_0,

$$\begin{aligned} \gamma_0 : & H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega) \\ & v \mapsto v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

En particulier, il existe une constante C telle que :

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq C||v||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Démonstration. On montre le résultat pour $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Soit v une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. On a,

$$\begin{aligned} |v(x',0)|^2 &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}(|v(x',t)|^2)dt \\ &= -2\int_0^{+\infty} v(x',t)\frac{\partial}{\partial t}(v(x',t))dt \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} (|v(x',t)|^2 + (\frac{\partial}{\partial t}(v(x',t)))^2)dt.$$

En intégrant sur $\mathbb{R}^{N-1}$, on obtient,

$$||v||^2_{L^2(\partial\mathbb{R}_+^N)} \leq ||v||^2_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Puisque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, l'application linéaire se prolonge de manière unique sur $H^1(\Omega)$. $\square$

Corollaire 2. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. On a alors,*

$$H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$$

4.3.7 Les espaces de Sobolev H^m

Définition 39. *Soit Ω un ouvert régulier de R^N. On définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par :*

$$H^m\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/\partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall\alpha,\ \textit{vérifiant}\ |\alpha| \leq m\}$$

où les dérivées $\partial^\alpha u$ sont prises au sens des distributions.

Proposition 15. *Muni du produit scalaire,*

$$(f,g) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha f \partial^\alpha g dx,$$

et de la norme associée, l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Formules de Green

Proposition 16. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Soit u une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green,*

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)n_i(x)ds,$$

où n_i est la i-ème composante de la normale extérieure unité de Ω.

Proposition 17. *Pour toutes fonctions u, v de $C^1(\Omega)$, on a,*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v + \int_{\partial\Omega} uvn_i$$

Démonstration. On applique la formule de green à la fonction $w = uv$. □

Théorème 16. *Pour toutes fonctions u, v de $H^1(\Omega)$, on a,*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v + \int_{\partial\Omega} uvn_i$$

Théorème 17. *Soit Ω un ouvert de classe C^1 ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_1 de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\gamma_1 :& H^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \mapsto L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\partial\Omega)\\ & v \mapsto \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Cette application linéaire se prolonge par continuité en une aplication linéaire continue encore notée γ_1,

$$\begin{aligned}\gamma_1 :& H^2(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)\\ & v \mapsto \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

En particulier, il existe une constante C telle que :

$$||\frac{\partial v}{\partial n}||_{L^2(\Omega)} \leq C||v||_{H^2(\Omega)}.$$

Proposition 18. *Pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a,*

$$\int_\Omega \Delta uv = -\int_\Omega \nabla u\nabla v + \int_{\partial\Omega} v\nabla u.n$$