Chapitre 5

Formulation variationnelle de problèmes aux limites

5.1 Le problème de Dirichlet homogène

Dans ce chapitre, on va utiliser le problème modèle suivant pour introduire la formulation variationnelle des problèmes aux limites.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + cu & = & f \text{ sur } \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{5.1}$$

5.2 Formulation variationnelle du problème

Soit u, une solution du problème (5.1) ayant la régularité : $u \in H^2(\Omega)$. Soit $v \in H^1(\Omega)$ quelconque. On multiplie l'équation par v et on intégre. On vérifie compte tenu de nos hypothèses que cette intégration est possible. On a alors

$$\int_\Omega -\Delta uv dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx.$$

En utilisant la formule de Green, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

Supposons que $v = 0$ p.p sur $\partial\Omega$ (ce qui est le cas si $v \in H_0^1(\Omega)$). Alors on obtient le problème suivant,

$$\forall v \in V, \mathcal{A}(u, v) = L(v) \tag{5.2}$$

où l'on a posé :

$$V = H_0^1(\Omega) \tag{5.3}$$
$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega cuvdx \tag{5.4}$$
$$L(v) = \int_\Omega fvdx \tag{5.5}$$

Déterminer une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie les équations (5.2)-(5.5) est la formulation variationnelle du problème (5.1). Supposons que l'on ait résolu ce problème. A-t-on résolu le problème de départ ?

5.3 Interprétation de la formulation variationnelle

On a le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors u est solution du problème aux limites* (5.1) *si et seulement si elle est solution du problème variationnel* (5.2)-(5.5).

Démonstration. Nous avons déjà montré que u est solution de (5.1) implique u solution de (5.2)-(5.5). Montrons la réciproque. Soit $u \in V$ solution de (5.2)-(5.5). Comme l'équation (5.2) est vérifiée pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, elle est en particulier vraie pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions C^∞ à support compact). Ce qui permet d'interpréter (5.2) au sens des distributions. Ainsi pour toute fonction v de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega cuvdx = \int_\Omega fvdx$$

Chaque élément apparaissant dans l'équation est une distribution, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} > + < cu, v > = < f, v > .$$

Par définition de la dérivée au sens des distributions, on a :

$$-\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v > + < cu, v > = < f, v >$$

On a donc, au sens des distributions :

$$-\Delta u + cu = f.$$

On retrouve donc l'équation (5.1) mais en un sens faible. Mais de l'égalité précédente, on déduit que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et que l'égalité a donc lieu dans $L^2(\Omega)$ et donc presque partout. Quand à la condition aux limites, elle est naturellement satisfaite, puisque $u \in H_0^1$ entraine que $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$. $\square$

5.4 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire noté $(.,.)$ et de norme associée $||.||$. On se propose de résoudre le problème suivant : trouver $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, on ait :

$$\mathcal{A}(u,v) = L(v). \tag{5.6}$$

On impose les conditions suivantes :

1. L est linéaire et continue : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H$, $|L(v)| \leq C||v||_H$.
2. $\mathcal{A}$ est une application bilinéaire continue définie sur $H \times H$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe une constante M telle que :
$$\forall (u,v) \in H \times H, |\mathcal{A}(u,v)| \leq M||u||_H||v||_H.$$
3. $\mathcal{A}$ est coercive, c'est à dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $v \in H$
$$\mathcal{A}(v,v) \geq \alpha||v||^2$$

On peut maintenant énoncer le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 1. *Soit H un espace de Hilbert réel, $\mathcal{A}$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H et L une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème variationnel* (5.9)*. De plus, il existe une constante C telle que :*

$$||u|| \leq C||L||_{H'}$$

Démonstration. Le théorème de Riesz permet de définir une application linéaire A telle que,

$$\mathcal{A}(u,v) = (A(u),v),$$

et un vecteur f tel que,

$$L(v) = (f,v).$$

De sorte que le problème est équivalent à :

$$A(u) = f.$$

On montre maintenant que A est injectif et surjectif. L'injectivité vient du fait que :

$$\begin{aligned}\alpha||v||^2 &\leq \mathcal{A}(v,v) \\ &\leq (A(v),v) \\ &\leq ||A(v)||||v||.\end{aligned}$$

Montrons maintenant la surjectivité. Soit F l'image par A de H. F est un sous-espace fermé de H. En effet, si $A(x_n)$ est une suite convergente, alors c'est une suite de Cauchy. Ceci implique que x_n est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers un élément x. Alors par continuité de A, $A(x_n)$ converge vers $A(x)$ et F est fermé. On a donc $H = F \oplus F^{\perp}$ (utiliser le théorème de projection sur un sous espace vectoriel fermé). Maintenant, soit $x \in F^{\perp}$. Alors, $\forall y \in H$,

$$\begin{aligned} 0 &= (A(y), x) \\ &= \mathcal{A}(y, x). \end{aligned}$$

Donc,

$$0 = \mathcal{A}(x, x) \geq \alpha ||x||^2.$$

Donc $x = 0$ et $F = H$. Enfin, puisque,

$$\alpha ||x|| \leq ||Ax||,$$

on a,

$$\alpha ||A^{-1}y|| \leq ||y||.$$

□

5.5 Résolution du problème de Dirichlet homogène

Nous allons vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. L'espace $H = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$ induite par l'espace $H^1(\Omega)$, mais aussi, d'après l'inégalité de Poincaré, pour la norme réduite $|.|_{H_0^1,\Omega} = (\int_\Omega |\nabla \cdot|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. C'est donc cette norme que l'on choisit. La forme L est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|L(v)| \leq ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_P} ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}$$

où C_P désigne l'inégalité de Poincaré. Étudions la continuité de la forme bilinéaire $\mathcal{A}$. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'abord dans $L^2(\Omega)$ puis dans $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$|\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}| \leq \sum_{i=1}^{N} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} ||\frac{\partial v}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} \leq ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}$$

On a également,

$$|\int_\Omega cuvdx| \leq ||c||_{L^\infty(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \leq C_P(\Omega) ||c||_{L^\infty(\Omega)} ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leq M||u||_{H_0^1(\Omega)}||v||_{H_0^1(\Omega)}$$

Reste à étudier la coercivité de $\mathcal{A}$. On a :

$$\mathcal{A}(v,v) = |v|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega cv^2 dx$$

Si $c \geq 0$ alors $\mathcal{A}$ est coercive. On peut être un peu plus précis. On pose $c^-(x) = c(x)$ si $c(x) \leq 0$, $c^-(x) = 0$ sinon. On a alors,

$$\mathcal{A}(v,v) \geq (1 - C_P||c^-||_{L^\infty(\Omega)})||v||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc si $(1-C_P||c^-||_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ alors la forme $\mathcal{A}$ est coercive et on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram. On a donc le théorème suivant :

Théorème 2. *Supposons que $f \in L^2(\Omega), c \in L^\infty(\Omega)$. Alors si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

$$c \geq 0 \textit{ presque partout sur } \Omega \tag{5.7}$$

$$||c^-||_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{C_P} \tag{5.8}$$

le problème variationnel (5.2)-(5.5) *admet une unique solution dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. On a par ailleurs $\Delta u \in L^2(\Omega)$. De plus u vérifie l'équation* (5.1) *presque partout dans Ω et la condition limite presque partout sur $\partial\Omega$. Enfin, il existe une constante positive C_0 telle que :*

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0||f||_{L^2(\Omega)} \tag{5.9}$$

et le problème dépend continûment de la donnée f.

Démonstration. L'existence, l'unicité, la régularité et le lien avec le problème aux limites ont déjé été établis. Il reste à montrer l'inégalité (5.9). On utilise le fait que

$$\alpha||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq \mathcal{A}(u,u) = L(u) \leq \sqrt{C_P}||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{H_0^1(\Omega)}$$

Ce qui montre le résultat avec $C_0 = \frac{\sqrt{C_P}}{\alpha}$. □