# Chapitre 6

# La méthode des éléments finis

## 6.1 Introduction

La méthode des éléments finis est actuellement la méthode la plus utilisée pour la résolution de problèmes aux limites. Elle découle directement de l'approche variationnelle introduite au chapitre précédent.

## 6.2 Approximation interne

Soit $H$ un espace de Hilbert, on a vu au chapitre précédent comment le théorème de Lax-Milgram permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H$ du problème variationnel :

$$\mathcal{A}(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H,$$

où $\mathcal{A}$ est une application bilinéaire continue et coercive et $L$ une application linéaire continue. L'approximation interne consiste à remplacer l'espace $H$ par un sous-espace vectoriel de dimension finie $V_h$. On considère alors le problème consistant à trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$\mathcal{A}(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{6.1}$$

On alors le lemme suivant :

**Lemme 1.** *Soit $H$ un espace de Hilbert réel et $V_h$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H$, $\mathcal{A}$ est une application bilinéaire continue et coercive et $L$ une application linéaire continue alors il existe une unique solution de l'équation* (6.1). *Par ailleurs, cette solution peut s'obtenir en résolvant un systéme linéaire de matrice définie positive.*

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de $u_h$ résulte de l'application du théorème de Lax-Milgram appliqué à l'espace $V_h$ car c'est lui même un espace de Hilbert. Soit alors $\phi_1, ..., \phi_{N_h}$ une base orthonormale de $V_h$. En posant, $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \phi_i$, le problème (6.1) s'écrit,

$$\sum_{j=1}^{N_h} U_j \mathcal{A}(\phi_j, \phi_i) = L(\phi_i) \quad \forall i \in 1, ..., N_h.$$

ou encore,

$$K_h U_h = b_h.$$

où,

$$K_{h,i,j} = \mathcal{A}(\phi_j, \phi_i) \text{ et } (b_h)_i = L(\phi_i).$$

La matrice $K_h$ est définie positive car pour tout $X \in \mathbb{R}^{N_h}$, on a :

$$\begin{aligned}
(K_h X, X) &= \sum_{i=1}^{N_h} (\sum_{j=1}^{N_h} K_{h,i,j} X_j) X_i \\
&= \sum_{i=1}^{N_h} (\sum_{j=1}^{N_h} \mathcal{A}(\phi_j, \phi_i) X_j) X_i \\
&= \mathcal{A}(x, x) \text{ où } x = \sum_{i=1}^{N_h} X_i \phi_i \\
&\geq \alpha ||x||_H^2 \\
&\geq \alpha' ||X||^2 \text{ (car toutes les normes sont équivalentes} \\
&\text{dans un espace vectoriel de dimension finie).}
\end{aligned}$$

□

On cherche maintenant à majorer $||u - u_h||$, c'est à dire la distance entre la solution exacte et la solution approchée. On a,

**Lemme 2** (Lemme de Cea)**.**

$$||u - u_h|| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||$$

*Démonstration.* On a pour tout $w_h \in V_h$,

$$\mathcal{A}(u - u_h, w_h) = 0.$$

Donc en prenant $w_h = u_h - v_h$, on obtient,

$$\mathcal{A}(u - u_h, u - u_h) = \mathcal{A}(u - u_h, u - v_h),$$

donc,

$$\alpha||u - u_h||^2 \leq M||u - u_h||||u - v_h||$$

□

**Lemme 3.** *On suppose qu'il existe un sous espace $V$ dense dans $H$ et une application linéaire $r_h$ de $V$ dans $V_h$ telle que pour tout $v \in V$,*

$$\lim_{h \to 0} ||v - r_h(v)|| = 0$$

*alors,*

$$\lim_{h \to 0} ||u - u_h|| = 0.$$

*Démonstration.* Par densité de $V$ dans $H$, il existe $v \in V$ tel que $||u - v|| \leq \epsilon$. Et pour $h$ assez petit $||v - r_h(v)|| \leq \epsilon$. Alors,

$$||u - u_h|| \leq C||u - r_h(v)|| \leq C(||u - v|| + ||v - r_h(v)||) \leq 2C\epsilon.$$

□

## 6.3 La méthode des éléments finis en dimension un

On considère le domaine $\Omega = ]0, 1[$. On subdivise l'intervalle $]0, 1[$ à l'aide de $n + 1$ points,

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1.$$

On suppose le maillage uniforme, c'est à dire que,

$$x_{i+1} - x_i = h = \frac{1}{n} \quad \forall i \in 0, ..., n - 1.$$

On cherche à approcher la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

### 6.3.1 Les éléments finis $P_1$

L'approximation par éléments finis $P_1$ se fait par l'espace des fonctions continues et égales à un polynôme de degré inférieur ou égal à un sur chaque subdivision. On considère les espaces,

$$V_h = \{v \in C^0(0,1); v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_1, \forall j \in 0,1,...,n-1\},$$

et,

$$V_{0h} = \{v \in C^0(0,1); v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_1, \forall j \in 0,1,...,n-1, v(0)=v(1)=0\}.$$

Pour tout $j \in \{0,n\}$, on pose (pour $j=0$ ou $j=n$, on ne garde bien sûr que l'une des deux égalités) :

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{j-1},x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} \text{ si } x \in [x_j,x_{j+1}] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

**Lemme 4.** *L'espace $V_h$ est un sous-espace de $H^1(0,1)$ de dimension n+1 et toute fonction $v_h \in V_h$ s'écrit de manière unique :*

$$v_h = \sum_{j=0}^{n} v_h(x_j)\phi_j(x).$$

*L'espace $V_{0h}$ est un sous-espace de $H_0^1(0,1)$ de dimension n-1 et toute fonction $v_h \in V_{0h}$ s'écrit de manière unique :*

$$v_h = \sum_{j=1}^{n-1} v_h(x_j)\phi_j(x).$$

*Démonstration.* On a vu que les fonctions continues et $C^1$ par morceaux sont dans $H^1(0,1)$. Donc $V_h$ et $V_{0h}$ sont dans $H^1(0,1)$. Et $V_{0h}$ est dans $H_0^1(0,1)$. Par ailleurs on vérifie que les $(\phi_i)_{0\le i\le n}$ forment une base de $V_h$. En effet, c'est une famille génératrice (car $v_h = \sum_{j=0}^{n} v_h(x_j)\phi_j(x)$) et libre (car $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\phi_i(x_j) = 0$ implique $\alpha_j = 0$). Le résultat pour $V_{0h}$ s'obtient par un résultat analogue. □

### 6.3.2 Résolution pratique du problème de Dirichlet

On cherche une solution $u \in V_{0h}$ qui vérifie :

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv \quad \forall v \in V_{0h}.$$

On décompose $u_h$ dans la base des $(\phi_i)_{1\leq i\leq n-1}$. On obtient que,

$$\sum_{j=1}^{n-1} u_h(x_j)(\int_0^1 \phi_j'\phi_i' + \int_0^1 c\phi_j\phi_i) = \int_0^1 f\phi_i.$$

Si $|j-i|>1$ alors $\phi_i$ et $\phi_j$ ont des supports distincts (ou plus précisément réduits à un point). Ceci implique que les coefficients de la matrice $K$ seront nuls dès que $|i-j|>1$. On traite explicitement le cas où $f$ et $c$ sont constantes. On calcule :

$$\int_0^1 \phi_i'\phi_{i-1}' = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h}\frac{(-1)}{h} = -\frac{1}{h}.$$

$$\int_0^1 \phi_i'\phi_{i+1}' = -\frac{1}{h}.$$

$$\int_0^1 (\phi_i')^2 = 2h\frac{1}{h^2} = \frac{2}{h}.$$

$$\int_0^1 \phi_i\phi_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x-x_{i-1}}{h}\frac{x_i-x}{h} = h\int_0^1 u(1-u) = \frac{h}{6}.$$

$$\int_0^1 \phi_i\phi_{i+1} = \frac{h}{6}.$$

$$\int_0^1 (\phi_i)^2 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})^2}{h^2} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)^2}{h^2} = 2\frac{h}{3}.$$

$$\int_0^1 \phi_i = h.$$

On est alors amené à résoudre le système linéaire,

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h}+2h\frac{c}{3} & -\frac{1}{h}+h\frac{c}{6} & 0 & ... & 0 \\ -\frac{1}{h}+h\frac{c}{6} & \frac{2}{h}+2h\frac{c}{3} & -\frac{1}{h}+h\frac{c}{6} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & -\frac{1}{h}+h\frac{c}{6} & \frac{2}{h}+2h\frac{c}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ u_h(x_2) \\ ... \\ u_h(x_n) \end{pmatrix} = hf \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

où la matrice est de taille $(n-1)\times(n-1)$. Lorsque $c$ et $f$ ne sont pas constantes on peut utiliser des formules de quadrature pour approcher les intégrales des fonctions.

### 6.3.3 Convergence de la méthode

Soit,

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{N} v(x_j)\varphi_j(x).$$

On a le lemme suivant.

**Lemme 5.** *Pour toute fonction $v \in H^1(0,1)$,*

$$\lim_{h\to 0} ||v - r_h v||_{H^1(0,1)} = 0.$$

*De plus, si $v \in H^2$, alors il existe une constante $C$ indépendante de $h$ telle que,*

$$||v - r_h v||_{H^1(0,1)} \le Ch|v''|_{L^2(0,1)}.$$

On en déduit le théorème :

**Théorème 1.** *Soit $u \in H_0^1(0,1)$ et $u_h \in V_{0h}$ les solutions du problème. Alors la léthode des éléments finis converge c'est à dire que,*

$$\lim_{h\to 0} ||u - u_h||_{H^1(0,1)} = 0.$$

*De plus, si $u \in H^2$ il existe une constante $C$ indépendante de $h$ telle que,*

$$||u - u_h||_{H^1(0,1)} \le Ch|u''|_{L^2(0,1)}.$$

Le lemme 5 se démontre à l'aide de deux autres lemmes.

**Lemme 6.** *Il existe une constante $C$ indépendante de $h$ telle que pour tout toute fonction $v \in H^2(0,1)$,*

$$||v - r_h v||_{L^2(0,1)} \le Ch^2|v''|_{L^2(0,1)},$$

*et,*

$$v' - (r_h v)'||_{L^2(0,1)} \le Ch|v''|_{L^2(0,1)}, \tag{6.3}$$

*Démonstration.* On démontre le résultat pour $v \in C^\infty([0,1])$, le résultat se déduit alors par densité. Pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\begin{aligned} v(x) - r_h(v)(x) &= v(x) - (v(x_i) + \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)) \\ &= v'(\theta_x)(x - x_i) - v'(\theta_i)(x - x_i)) \\ &= (x - x_i)\int_{\theta_x}^{\theta_i} v''(t)dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|v(x) - r_h(v)(x)|^2 \leq h^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v'')^2(t)dt.$$

En intégrant, on obtient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |v(x) - r_h(v)(x)|^2 \leq h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v'')^2(t)dt.$$

On obtient la première inégalité du lemme en sommant sur $i$. Ensuite :

$$\begin{aligned} v'(x) - (r_h(v))'(x) &= v'(x) - \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ &= v'(x) - v'(\theta_i) \\ &= \int_{\theta_i}^{x} v''(t)dt. \end{aligned}$$

En élevant au carré et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cela donne :

$$(v'(x) - (r_h(v))'(x))^2 \leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(t))^2 dt.$$

En intégrant, on obtient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (v'(x) - (r_h(v))'(x))^2 \leq h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(t))^2 dt (v'')^2(t)dt.$$

D'où le résultat en sommant sur $i$. □

**Lemme 7.** *Il existe une constante $C$ indépendante de $h$ telle que pour toute fonction $v \in H^1(0,1)$,*

$$||r_h v||_{H^1(0,1)} \leq C|v|_{H^1(0,1)},$$

*et,*

$$||v - (r_h v)||_{L^2(0,1)} \leq Ch||v'||_{L^2(0,1)}.$$

*De plus, pour toute fonction $v \in H^1(0,1)$, on a :*

$$\lim_{h \to 0} ||v' - (r_h v)'||_{L^2(0,1)} = 0.$$

*Démonstration.* Soit $v \in H^1(0,1)$, on a :

$$||r_h v||_{L^2(0,1)} \leq \max_{x\in[0,1]} |r_h v(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} |v(x)| \leq C||v||_{H^1(0,1)}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |(r_h v)'(x)|^2 &= \frac{(v(x_{i+1}) - v(x_i))^2}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} v'\right)^2 \qquad\qquad \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v'|^2.\end{aligned}$$

On en déduit la première inégalité par sommation sur $i$. D'autre part :

$$\begin{aligned}|v(x) - r_h(v)(x)| &= |v(x) - (v(x_i) + \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i))| \\ &\leq 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} |v'(t)|dt.\end{aligned}$$

□

On obtient la seconde inégalité, en élevant au carré, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en intégrant sur $[x_i, x_{i+1}]$ et en sommant sur $i$. Soit $\epsilon > 0$, comme $C^\infty([0,1])$ est dense dans $H^1(0,1)$, pour tout $v \in H^1(0,1)$, il existe $\phi \in C^\infty([0,1])$ telle que :

$$||v - \phi||_{H^1(0,1)} \leq \epsilon.$$

Par ailleurs :

$$||(r_h v)' - (r_h\phi)'||_{L^2(0,1)} \leq C||v - \phi||_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon.$$

$\phi$ et $\epsilon$ étant fixés, on déduit de (6.3) que pour $h$ assez petit :

$$||\phi' - (r_h\phi)'||_{L^2(0,1)} \leq \epsilon.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}||v' - (r_h v)'||_{L^2(0,1)} &\leq ||v' - \phi'||_{L^2(0,1)} + ||\phi' - (r_h\phi)'||_{L^2(0,1)} + ||(r_h\phi)' - (r_h v)'||_{L^2(0,1)} \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$