Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(3ème Année)- Mathématiques

Examen partiel du 18 avril 2016 - Durée : deux heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. Soit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^5+10xy^2z^2, y^5+10yx^2z^2, z^5+10zy^2x^2) \end{array}$$

Soit S la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 2 :

$$S = \{(x,y,z) \subset \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\}$$

Calculer :

$$\int_S F \cdot \hat{n} ds$$

où $\hat{n}$ désigne le vecteur normal unitaire, ds la mesure de l'élément de surface, et $\cdot$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

Correction On utilise le théorème de la divergence, puis un changement de coordonnées sphériques, on trouve :

$$\int_S F \cdot \hat{n} ds = \frac{2560}{7}\pi$$

L'astuce consistait à remarquer ici que

$$x^4 + y^2z^2 + y^4 + x^2z^2 + z^4 + y^2x^2 = (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Exercice 2. Soit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xz, x^2, 3xy) \end{array}$$

Soit V défini par :

$$V = \{(x,y,z) \subset \mathbb{R}^3 ; \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \text{ et } 0 \leq z \leq y\}$$

On note S la surface délimitant le bord de V. Calculer :

$$\int_S F \cdot \hat{n} ds$$

où $\hat{n}$ désigne le vecteur normal unitaire, ds la mesure de l'élément de surface, et $\cdot$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

Correction On utilise le théorème de la divergence, puis on passe en coordonnées polaires, on trouve :

$$\int_S F \cdot \hat{n} ds = 2\pi.$$

Exercice 3. Soit D défini par :

$$D = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^3 \leq y \leq x\}$$

et soit C la courbe fermée délimitant le bord de D.

1. Représenter graphiquement C et D.
2. Calculer
$$\int_C (x^2 - y^2)dx - 2yxdy$$
3. Soit $F(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$. Quel est le lien entre F et $x^2 - y^2$, et entre F et $-2yx$? Le résultat obtenu à la question 2 est-il surprenant ? Justifier votre réponse.
4. Calculer
$$\int_C (x^2 + y^2)dx - 2yxdy$$

Correction

1. Voir figure 1.
2. D'après la formule de Green-Riemann, on trouve
$$\int_C (x^2 - y^2)dx - 2yxdy = 0.$$
3. On pose $P(x,y) = x^2 - y^2$ et $Q(x,y) = -2yx$. Alors $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. Donc F est une primitive de $Pdx + Qdy$. On en déduit que $\int_C (Pdx + Qdy = 0$ car C est une courbe fermée.
4. En utilisant la formule de Green-Riemann, on trouve :
$$\int_C (x^2 + y^2)dx - 2yxdy = -\frac{8}{21}$$

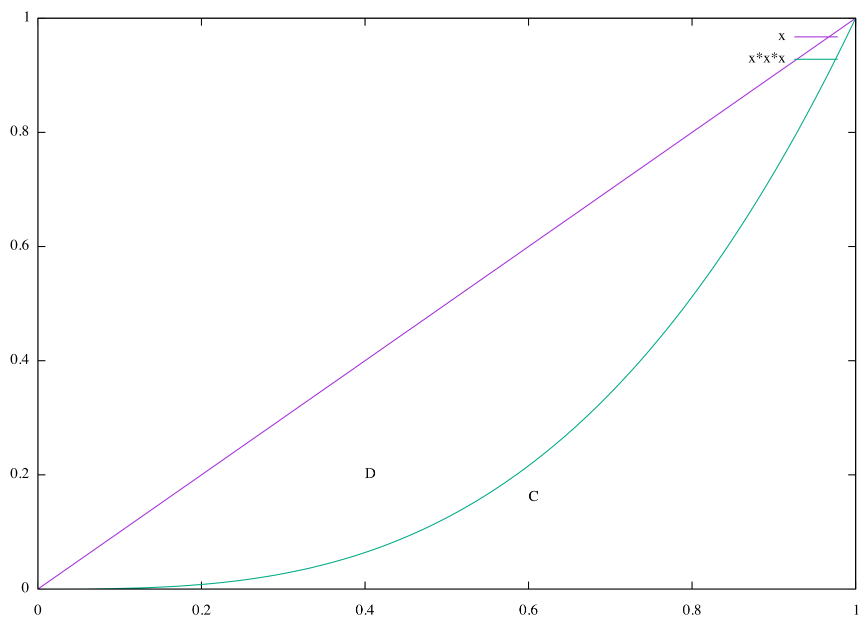

FIGURE 1 –

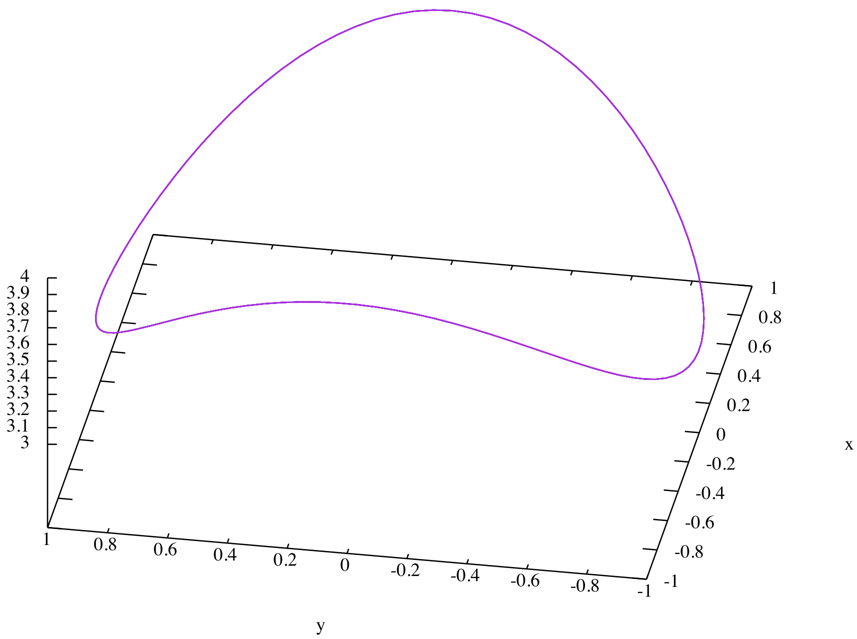

FIGURE 2 –

Exercice 4. Soit C la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$C = \{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 4 - y^2\}$$

Soit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (\frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}z^2, \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}xz, xz) \end{array}$$

1. Donner l'allure de la représentation graphique de C.
2. Calculer
$$\int_C F \cdot \hat{T} d\sigma$$
où $\hat{T}$ désigne le vecteur tangeant unitaire, $d\sigma$ la mesure élémentaire sur la courbe, et $\cdot$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

Correction

1. Voir figure 2.
2. On utilise le théorème de Stokes. On trouve
$$\int_C F \cdot \hat{T} d\sigma = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 5. Résoudre l'équation suivante :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\tag{1a}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in]0,+\infty[\tag{1b}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{1c}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x). \tag{1d}$$

où

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$$

et

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$$

Correction

La résolution générale a été traitée en cours. On applique la même méthode. En reprenant les notations du cours, il suffit ensuite de trouver les coefficients α_n et β_n qui conviennent. On montre que les coefficients $\alpha_n = \frac{1}{n}$, et $\beta_n = \frac{1}{cn^2\pi}$ conviennent. Ainsi

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{20} (\frac{1}{n} \cos(cn\pi t) + \frac{1}{cn^2\pi} \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x)$$

est solution.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle suivante :

$$au'' + bu' + cu = 0 \tag{2}$$

avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions de (2). Justifier vos réponses.

Correction

Cela a été traité en cours.