# Université du Havre
# UFR des Sciences et Techniques
# Licence Sciences, Technologies, Santé
# (2ème Année)- Méthodes numériques

Examen du 1 septembre 2011 - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

**Exercice 1.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$$

La courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $[0, 2.5]$ est donnée à la figure 1. Ci-dessous on a représenté son tableau de variation. On admettra les informations qui y sont données. Dans ce tableau, $a, b, c$ et $d$ sont les racines de $f'(x)$ classées par ordre croissant.

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $d$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(a) > 0$ | $\searrow$ | $f(b) < 0$ | $\nearrow$ | $f(c) > 0$ | $\searrow$ | $f(d) < 0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On considère l'équation :

$$f(x) = 0$$

1. Déterminer les racines de $f$ (elles sont évidentes). Montrer ensuite que $f$ est impaire.
2. Rappeler l'algorithme de Newton.

3. On suppose que $x_0 = 2.5$. Déterminer graphiquement le terme $x_1$ de la suite des itérés de Newton.
4. Montrer que pour $x > 2$, $f''(x) > 0$. On suppose que $x_0 > 2$. Quel est le comportement de la suite des itérés de Newton ? Justifier votre réponse.
5. Quel est le comportement de la suite des itérés de Newton si $x_0 < -2$ ?
6. Montrer qu'il existe un voisinage $]\alpha, \beta[$ autour de $0$, tel que pour $x_0 \in ]\alpha, \beta[$, la suite des itérés de Newton converge vers $0$. Existe-t-il un résultat analogue en $-1$ ? Et en $1$ ?
7. On rappelle l'algorithme de Lagrange, $x_{n+1}$ est donné par la résolution de l'équation :

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = 0$$

On suppose que $x_0 = 2.5$, $x_1 = 1.5$. Déterminer graphiquement le terme $x_2$ de la suite des itérés de Newton.

**Exercice 2.**

1. Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 6 & 13 & -4 \\ 15 & 36 & 2 \end{pmatrix}.$$
Donner la décomposition $LU$ de la matrice $A$.
2. Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 26 & -13 \\ -4 & -13 & 62 \end{pmatrix}.$$
Donner la factorisation de Cholesky de la matrice $A$.
3. Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 14 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$
Donner la décomposition $QR$ de la matrice A.

**Exercice 3.**
**QCM**
*Dans cet exercice il est demandé de répondre vrai ou faux, sans aucune justification.*

1. Soit $f$ une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que
$$f(a)f(b) < 0$$
alors il existe un unique réel $l$ appartenant à $]a, b[$ tel que
$$f(l) = 0.$$

2. Soit
$$g(x) = 2 + \ln(x)$$
il existe $l$ appartenant à $]1, e^2[$ tel que $g(l) = l$.

3. Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $l \in [a, b]$ tel que $f(l) = 0$. On considère la suite définie par
$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(x_n)$$
avec $x_0 \in [a, b]$ donné. Alors
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$$

4. Soit $A$ une matrice dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles. Il existe un unique couple de matrices $(L, U)$, avec $U$ triangulaire supérieure, et $L$ triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux valent $1$ tel que
$$A = LU$$

5. Soit $A$ une matrice réelle symétrique. Il existe une unique matrice réelle $B$ triangulaire inférieure, telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et qui vérifie :
$$A = BB^t$$

**Exercice 4.** On rappelle l'algorithme de Cholesky pour une matrice $A$ de taille $n \times n$.

**Algorithme de Cholesky**

Pour $j$ allant de $1$ à $n$
    Pour $k$ allant de $1$ à $j-1$
        $a_{jj} = a_{jj} - (a_{jk})^2$
    Fin $k$
    $a_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$
    Pour $i$ allant de $j+1$ à $n$
        Pour $k$ allant de $1$ à $j-1$
            $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{jk}$
        Fin $k$
        $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
    Fin $i$

Déterminer le nombre d'opérations effectuées lors de cet algorithme (on ne compte que les multiplications et les divisions et on ne donne que le terme de plus haut degré en $n$).

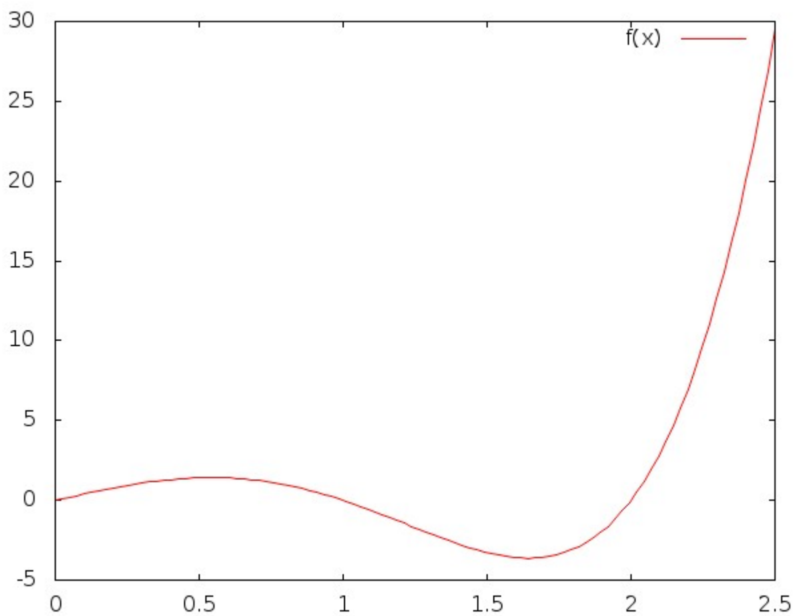


FIGURE 1 – Courbe représentative de $f(x)$