Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Interrogation écrite du 24 octobre 2013 - Durée : 2 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. (2 pts)
Donner la valeur en base de 10 de tous les nombres normalisés du système de flottants $\mathcal{F}(2, 2, -1, 2)$ de base $\beta = 2$, avec un nombre de chiffres significatifs de la mantisse $r = 2$, de valeur d'exposant minimal $e^- = -1$ et de valeur d'exposant maximal $e^+ = 2$. (On suppose que la virgule est placée juste après le premier chiffre non nul.) Les représenter sur un segment de droite centré en zéro.

Exercice 2. (2 pts)
Soit

$$a = 0,135713571357.......$$

Donner la représentation de a sous forme de fraction (en base 10).

Exercice 3. (5 pts)
Soit $f(x) = x^2 - 4$

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Rappeler la formule permettant de construire la suite des itérés de la méthode de la corde. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.
3. Énoncer un théorème permettant d'assurer la convergence de la méthode de la corde.
4. On pose $a = 0$. Déterminer une valeur de b telle que pour tout $x_0 \in [a, b]$, la méthode de la corde converge vers 2.
5. Pour un $x_0 \in [0, b]$ fixé, représenter les trois premiers termes de la suite (c'est à dire x_0, x_1 et x_2).

Exercice 4. (7 pts)
Soit $f(x) = -x^3 + x$

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$. On note s_0, s_1 et s_2 ces solutions classées par ordre croissant.
   (b) Déterminer les variations de la fonction f, sa convexité et en donner une représentation graphique.
2. La méthode de Newton
   (a) Rappeler la formule permettant de construire la suite des itérés de la méthode de Newton. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.
   (b) Enoncer un théorème donnant un critère de convergence globale de la méthode de Newton.
   (c) On suppose que $x_0 \in]-\infty, s_0[$. Représenter les trois premiers termes de la suite (c'est à dire x_0, x_1 et x_2).
   (d) Dans le cas où $x_0 \in]-\infty, s_0[$, quel est le comportement asymptotique (lorsque n tend vers $+\infty$) de la suite. Justifier votre réponse.
   (e) On suppose maintenant que $x_0 \in]s_0, \frac{-1}{\sqrt{3}}[$. Quel est le comportement asymptotique de la suite. Justifier votre réponse.
   (f) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} + \alpha[$ la suite converge vers s_2. Justifier votre réponse.
   (g) Déterminer le comportement asymptotique de la suite pour $x_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ et $x_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

Exercice 5. (7 pts)
Soit :

$$\begin{array}{rll} g: & [0,1] & \mapsto \mathbb{R} \\ & x & \to \mu x(1-x^2) \end{array} \tag{1}$$

1. Rappeler la formule permettant de construire la suite des itérés de la méthode du point fixe. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.
2. Enoncer le théorème de convergence globale de la méthode de point fixe.
3. On suppose que $\mu \in]0, \frac{1}{2}[$. Quel est le comportement asymptotique de la suite x_n. Justifier votre réponse.
4. On suppose que $\mu \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Déterminer le comportement asymptotique de la suite x_n.