Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle continu du 19 décembre 2013 - Durée : 2 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Rappeler la formule permettant de construire la suite des itérés de la méthode de Newton.
2. En général, quel est l'ordre de la méthode de Newton ?
3. Démontrer votre assertion de la question précédente.

Exercice 2.
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 5 & -9 \\ -4 & 8 & -4 & 2 \\ -6 & 13 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la méthode de Gauss, triangulariser la matrice A.
2. (a) Déterminer la matrice E^1, telle que lorsqu'on multiplie A à gauche par par la matrice E^1, on effectue la première étape de la méthode de Gauss. C'est à dire, que la multiplication par E^1 laisse inchangé le coefficient $A_{1,1}$ et met à 0 tous les coefficients $A_{i,1}, 2 \leq i \leq 4$ de la matrice A. On pose $A^2 = E^1 A$. De manière analogue, déterminer la matrice E^2 (resp E^3), permettant d'effectuer la deuxième étape (resp, la troisième étape) de la méthode de Gauss, c'est à dire, permettant de mettre à 0 les coefficients $A^2_{3,2}$ et $A^2_{4,2}$ (resp $A^3_{4,3}$ de la matrice A^2 (resp A^3). On pose $A^3 = E^2 A^2$ et $A^4 = E^3 A^3$.

   (b) Soit $F^k, k \in \{1, 2, 3\}$, une matrice de taille 4×4 triangulaire inférieure constituée de 1 sur la diagonale et vérifiant $F^k_{i,j} = 0$ dès que $i > j$ et $j \neq k$. Déterminer l'inverse de F^k.

   (c) Déterminer $(F^2)^{-1}(F^3)^{-1}$, puis $(F^1)^{-1}(F^2)^{-1}(F^3)^{-1}$.
3. En déduire, les matrices L et U, où L est triangulaire inférieure à diagonale unité, et U matrice triangulaire supérieure telles que :
$$A = LU.$$
4. (a) En utilisant le produit matriciel et le fait que $A = LU$, proposer une autre méthode pour calculer les matrices L et U.

   (b) Retrouver les valeurs de L et U en utilisant cette dernière méthode.

5. (a) Rappeler l'algorithme de factorisation LU.
   (b) Calculer le nombre d'opérations effectuées (multiplications et divisions) lors de cet algorithme.

Exercice 3.

1. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$. On note $a_i, 1 \leq i \leq n$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Pour des vecteurs $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, on pose $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $||x|| = \sqrt{< x, x >}$. On cherche à construire n vecteurs $q_i, 1 \leq i \leq n$, orthogonaux et de norme 1, à partir des vecteurs $a_i, 1 \leq i \leq n$.
   (a) On pose $q_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$ et $\tilde{q}_2 = a_2 + \alpha_1 q_1$. Déterminer la valeur de α_1 pour que $< \tilde{q}_2, q_1 >= 0$. On pose $q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{||\tilde{q}_2||}$.
   (b) Supposons les vecteurs q_j construits jusqu'à l'ordre $i - 1$. On pose $\tilde{q}_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j q_j$. Déterminer les valeurs des coefficients $\alpha_j, 1 \leq j \leq i-1$ pour que pour tout $j \in \{1, ..., i-1\}$, on ait :
   $$< \tilde{q}_i, q_j >= 0.$$
   On pose $q_i = \frac{\tilde{q}_i}{||\tilde{q}_i||}$.
2. Déduire de la question précédente, l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire R (que l'on explicitera), triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.
3. Donner la factorisation QR de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$