Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Interrogation écrite du 27 mars 2012 - Durée : deux heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, on s'intéresse à la résolution théorique et numérique du problème suivant : trouver une fonction $u : [0, a[\mapsto \mathbb{R}$ solution de l'équation,

$$\begin{cases} u'(t) &= f(u(t)) \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{1}$$

où a est soit un nombre strictement positif, soit $+\infty$. Pour l'approximation numérique de la solution du problème (1), on se donne un nombre strictement positif T, un pas de temps h. On pose alors $N = \frac{T}{h}$, et on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en posant $t_i = ih$. L'approximation de la solution du problème (1) sur l'intervalle $[0, T]$ consiste alors à construire un vecteur $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ selon une méthode donnée.

Exercice 1.

1. Décrivez succinctement les méthodes de résolution numériques suivantes :
   (a) La méthode d'Euler explicite.
   (b) La méthode d'Euler implicite.
   (c) La θ-méthode.
   (d) La méthode de Runge-Kutta RK2.
   (e) La méthode de Runge-Kutta RK4.
2. On suppose que $f(u) = au$ avec $a < 0$. Calculer la solution exacte du problème (1).
3. On suppose que $u_0 > 0$, et que $U_0 = u_0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et h pour que l'approximation $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ construite par la méthode d'Euler explicite soit strictement décroissante.

Exercice 2.
Soit,

$$f(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + u^2}.$$

1. Calculer $f'(u)$.
2. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'il existe une unique fonction u qui soit solution du problème (1) sur $[0, +\infty[$.

4. Déterminer les solutions de l'équation
$$f(u) = 0.$$
5. Déterminer le comportement asymptotique (c'est dire lorsque t tend vers $+\infty$) de $u(t)$ en fonction de la valeur de u_0.

Exercice 3. On considère le problème (1) avec $f(u) = -u^2$.

1. Étude théorique
   (a) Montrer que quelque soit la valeur de u_0, il existe $t_0 > 0$ et une unique fonction u définie sur $[0, t_0[$ qui soit solution du problème (1).
   (b) Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 > 0$. Quel est le sens de variation de $u(t)$? Résoudre l'équation (1). Quel est le comportement asymptotique de $u(t)$?
2. Approximation par la méthode d'Euler explicite.
   (a) Soit $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ le vecteur construit par la méthode d'Euler explicite, avec $U_0 = u_0 > 0$. Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.
   (b) Montrer que :
      i. la suite U_n est décroissante,
      ii. si $h < \frac{1}{U_0}$ alors $U_n > 0$ pour tout $n \in 1, ..., N$,
      iii. si $h > \frac{1}{U_0}$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $U_i < -\alpha$ pour tout $n \in 1, ..., N$.
   (c) On suppose que $h < \frac{1}{U_0}$. On suppose que $u(t)$ est la solution exacte de l'équation (1), on pose,
   $$\forall n \in 0, ..., N \quad V_n = u(nh),$$
   et,
   $$\forall n \in 0, ..., N \quad e_n = V_n - U_n.$$
   Montrer qu'il existe une constante $L = 2U_0$ et une constante C telles que,
   $$|e_{n+1}| \leq (1 + Lh)|e_n| + Ch^2.$$
   (d) En déduire que,
   $$|e_n| \leq (1 + Lh)^n|e_0| + Ch^2(\sum_{k=0}^{n-1}(1 + Lh)^k).$$
   (e) Quelle est la valeur de e_0 ? En déduire que,
   $$|e_n| \leq \frac{C}{L}h((1 + Lh)^n - 1),$$
   (f) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 + x) \leq e^x$. Montrer que
   $$\lim_{h\to 0} \max_{n\in 0,...,N} |e_n| = 0.$$
3. Approximation par la méthode d'Euler implicite.
   (a) Soit $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ le vecteur construit par la méthode d'Euler implicite, avec $U_0 = u_0 > 0$. Montrer que si $U_n > 0$ alors l'équation (avec l'inconnue x),
   $$x = U_n + hf(x)$$
   admet deux solutions distinctes, l'une strictement positive et l'autre strictement négative.

(b) Montrer que si l'on applique l'algorithme de Newton, avec $U_n > 0$ et avec une condition initiale (de l'algorithme de Newton) $x_0 > 0$ pour résoudre l'équation,

$$x - U_n - hf(x) = 0,$$

alors l'algorithme converge vers la solution positive.

(c) On considère donc qu'à chaque itération de la méthode d'Euler implicite, c'est cette solution positive qui est choisie. De sorte que l'on a $U_n > 0 \quad \forall n \in 0, ..., N$. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in 0,...,N}$ est décroissante.

(d) Soit g la fonction qui a w positif associe la solution x positive de,

$$x - w + hf(x) = 0.$$

Montrer que pour tout $w_1, w_2 \in]0, U_0[$, si $h < \frac{1}{L}$ avec $L = 2U_0$ alors,

$$|g(w_1) - g(w_2)| \leq \frac{1}{1 - Lh}|w_1 - w_2|.$$

(e) On vient de montrer que l'algorithme d'Euler implicite s'écrit :

$$U_{n+1} = U_n + hf(g(U_n)).$$

En déduire que,

$$\lim_{h \to 0} \max_{n \in 0,...,N} |e_n| = 0.$$

On pourra admettre pour cette question que,

$$V_{n+1} = V_n + hf(g(V_n)) + m(V_n)h^2$$

où $m(V_n) \leq C \forall V_n \in [0, U_0]$ et $C > 0$.