Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle continu du 28 mai 2013 - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(-2) = 4,\ f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4.$$

1. Déterminer, sans calculs, la valeur du polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2\}$. Justifier votre réponse.
2. Expliquer comment calculer la quantité $f[x_0, x_1, ..., x_4]$.
3. Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation de Newton de f sur le support $\{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2\}$. Le résultat est-il cohérent avec la question 1 ?

Exercice 2.
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et a, b deux réels. On pose

$$I_M = (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

1. (a) Exprimer I_M comme l'intégrale d'un polynôme d'interpolation de f.
   (b) Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx - I_M = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

2. On suppose que $a = 0, b = 1$, et que :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}.$$

   (a) Calculer I_M.

   (b) Calculer $f''(x)$.

   (c) Déterminer un majorant de $|f''|$ sur $[0, 1]$.

   (d) En déduire une majoration de :

$$|\int_0^1 f(x)dx - I_M|.$$

3. On pose maintenant

$$x_k = \frac{k}{10}, k \in \{0, ..., 10\},$$

   et,

$$I_{M,10} = 0.1 \times \sum_{k=0}^{9} f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}).$$

   Donner une majoration de :

$$|\int_0^1 f(x)dx - I_{M,10}|.$$

Exercice 3.
On s'intéresse à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} u' &= 1 - u^2 \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale de l'équation (1).
2. On suppose dans toute la suite de l'exercice que $u_0 \in]-1, 2[$.
   (a) Montrer que pour tout $t > 0$, $u(t) \in]-1, 2[$.
   (b) Déterminer le comportement asymptotique de la solution.

3. On s'intéresse maintenant à la solution approchée de l'équation (1) construite par la méthode d'Euler explicite. Soit $T > 0$, $h > 0$ petit et $N = \frac{T}{h}$ (on suppose que $N \in \mathbb{N}$). On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en posant $t_n = nh, 0 \leq n \leq N$. Soit $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ le vecteur obtenu par la méthode d'Euler explicite.
   (a) Donner la formule permettant de calculer la valeur u_{n+1} à partir de u_n.
   (b) Montrer que si $h < \frac{1}{4}$ alors $u_n \in]-1, 2[$ pour tout $n \in \{0, ..., N\}$. Dans la suite, on suppose que $h < \frac{1}{4}$.
   (c) Montrer que $|u''(t)| \leq 12$.
   (d) On pose pour tout $n \in \{0, ..., N\}$:
   $$v_n = u(t_n).$$
   Montrer que :
   $$v_{n+1} = v_n + h(1 - v_n^2) + \epsilon_n,$$
   où
   $$|\epsilon_n| \leq Ch^2 \text{ avec } C = 6.$$
   (e) En déduire que :
   $$|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq |u_n - v_n|(1 + Lh) + Ch^2 \text{ avec } L = 4.$$
   (f) En déduire que pour tout $n \in \{1, ..., N\}$:
   $$|u_n - v_n| \leq Ch^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1 + Lh)^k.$$
   (g) En déduire que :
   $$|u_n - v_n| \leq \frac{C}{L} h \exp LT.$$
   (h) Que peut-on en conclure ?