Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle du 19 mars 2014 - Durée : 2 heures.
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts de $\mathbb{R}$.

1. Soit :
$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{pmatrix}.$$
Montrer que D_n est inversible.
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme P_n, de degré inférieur ou égal à n tel que, pour tout $i \in 0, ..., n$:
$$f(x_i) = P_n(x_i).$$
3. Donner l'expression de $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x)$, sous sa forme de Lagrange (expliciter a_i et ϕ_i).
4. Montrer que les polynômes $\phi_i(x)_{i \in 0,...,n}$, appraissant dans l'expression précédente forment une base de $\mathbb{R}^n[X]$.
5. Donner l'expression du polynôme $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \psi_i(x)$, sous sa forme de Newton, (Expliquer comment calculer b_i et expliciter ψ_i).
6. Monter que les polynômes $\psi_i(x)_{i \in 0,...,n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n[X]$.
7. Montrer que :
$$b_n = \frac{\det A_n}{\det D_n}$$
où A_n est la matrice obtenue en remplaçant la dernière colonne de D_n par le vecteur $(f(x_0), ..., f(x_n))^t$.
8. On suppose dans cette question que $x_i = i, 0 \leq i \leq 3$ et que $f(x) = x^5 - x^3$. Déterminer le polynôme d'interpolation de f sous sa forme de Lagrange et de Newton, puis l'écrire dans la base usuelle.
9. On suppose dans cette question que $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 3$ et que $f(x) = x^5 - x^3$. Déterminer le polynôme d'interpolation de f sous sa forme de Newton généralisée.

Exercice 2.
Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et assez régulière.

1. On pose :
$$I_S = \frac{b-a}{6}(f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})).$$
Démontrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :
$$E_S = \int_a^b f(x)dx - I_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi). \tag{1}$$
2. Calculer l'intégrale I_D du polynôme d'interpolation de f sur le support $x_0 = x_1 = a, x_2 = x_3 = b$.
3. Donner une majoration de $E_D = \int_a^b f(x)dx - I_D$ qui fasse intervenir la dérivée quatrième de f.
4. On suppose que $a = 0, b = 3$, et que :
$$f(x) = x^5 - x^3.$$
   (a) Calculer la valeur de I_S dans ce cas (en donner un valeur approchée à 10^{-2}).
   (b) En utilisant, l'inégalité (1) donner une majoration de $|E_S|$.
   (c) Exprimer la valeur exacte de E_S et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (d) Exprimer la valeur de I_D dans ce cas et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (e) En utilisant la majoration obtenue à la question 3, donner une majoration de $|E_D|$.
   (f) Calculer la valeur exacte de E_D (en donner un valeur approchée à 10^{-2}).
5. Déterminer α et β tels que :
$$\begin{aligned} \alpha a + \beta &= -1 \\ \alpha b + \beta &= 1 \end{aligned}$$
6. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$. En utilisant le changement de variable $y = \varphi(x)$, montrer que l'on a :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 g(y)dy$$
où g est une fonction que l'on explicitera.
7. On rappelle que les polynômes de Legendre sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la formule de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x),$$
avec,
$$L_0(x) = 1 \text{ et } L_1(x) = x.$$
Calculer L_2 et L_3.
8. Déterminer les racines de L_3.

9. On rappele que la formule d'intégration de Gauss-Legendre peut s'écrire

$$I_{GL} = \int_{-1}^{1} p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\lambda_i = \frac{2}{(n+1)L'_{n+1}(x_i)L_n(x_i)}$$

les $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ étant les racines de $L_{n+1}(x)$ et p_n étant le polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$. Dans la suite, on considère de nouveau le cas où $a = 0, b = 3$, et $f(x) = x^5 - x^3$. Calculer l'intégrale du polynôme d'interpolation de g sur le support constitué des racines de L_3.

10. Calculer l'erreur exacte $E_{GL} = \int_a^b f(x)dx - I_{GL}$. Etait ce prévisible ? Justifier votre réponse.