Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle continu du 7 mai 2014 - Durée : 2 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(-2) = 1,\ f(-1) = -1,\ f(0) = -1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 5.$$

On pose :

$$x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme de degré 2, que l'on notera P_2 vérifiant :

   $$P_2(x_i) = f(x_i) \forall i \in \{0, ..., 4\}.$$

   Expliciter ce polynôme.
2. Déterminer le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, sous sa forme de Newton.
3. Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sous sa forme de Lagrange.

Exercice 2.
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et a, b deux réels. On pose

$$I_T = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

1. (a) Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation de f sur le support $\{a, b\}$. On notera P_T, ce polynôme.

   (b) Calculer :

   $$\int_a^b P_T(x)dx.$$

   Que constatez vous ?

(c) Montrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx - I_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

2. On suppose que $a = 0, b = 1$, et que :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$

(a) Calculer I_T.

(b) Calculer $f''(x)$.

(c) Déterminer un majorant de $|f''|$ sur $[0,1]$.

(d) En déduire une majoration de :

$$|\int_0^1 f(x)dx - I_T|.$$

3. On pose maintenant

$$x_k = \frac{k}{10}, k \in \{0, ..., 10\},$$

et,

$$I_{T,10} = 0.1 \times \sum_{k=0}^{9} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$

Donner une majoration de :

$$|\int_0^1 f(x)dx - I_{T,10}|.$$

Exercice 3.

On s'intéresse à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & u - u^p, p \in \mathbb{N}^*, p \; pair. \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \qquad (1)$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale de l'équation (1).

2. (a) On suppose que $u_0 = 0$. Quelle est la valeur de $u(t)$ pour tout $t \geq 0$ dans ce cas ?

(b) On suppose que $u_0 = 1$. Quelle est la valeur de $u(t)$ pour tout $t \geq 0$ dans ce cas ?

(c) On suppose que $u \in]0,1[$. Quel est le signe de u' dans ce cas ?

(d) En déduire le sens de variation de u tant que $u \in]0,1[$.

(e) On sait, d'après la question 1 que pour u_0 fixé, le problème (1) admet une unique solution. Dorénavant, sauf mention explicite du contraire, on suppose que $u_0 \in]0,1[$. Est-il possible que $u(t)$ atteigne la valeur 1 ? Justifier votre réponse.

(f) Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u(t) < 1 - \alpha$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que dans ce cas, il existe β tel que $u' > \beta > 0$ pour tout $t \geq 0$. En déduire une contradiction.

(g) En déduire la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

4. On s'intéresse maintenant à la solution approchée de l'équation (1) construite par la méthode d'Euler implicite. Soit $T > 0$, $h > 0$ petit et $N = \frac{T}{h}$ (on suppose que $N \in \mathbb{N}$). On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en posant $t_n = nh, 0 \leq n \leq N$. Soit $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ le vecteur obtenu par la méthode d'Euler implicite.
   (a) Donner la formule permettant de calculer la valeur u_{n+1} à partir de u_n. Quelle est la difficulté par rapport à la méthode d'Euler explicite.
   (b) On pose :
   $$g_h(x) = (1-h)x + hx^{p-1}.$$
   (c) On suppose h assez petit. Montrer que l'équation $g_h(x) = y$ admet une unique solution dans $]0,1[$ pour tout y dans $]0,1[$.
   (d) Montrer que $|u''(t)| \leq p-1$ pour $u \in]0,1[$.
   (e) On pose pour tout $n \in \{0, ..., N\}$:
   $$v_n = u(t_n),$$
   et
   $$\epsilon_n = v_{n+1} - v_n - hf(v_{n+1}).$$
   Montrer que
   $$|\epsilon_n| \leq Ch^2,$$
   où $C = \frac{p-1}{2}$.
   (f) Montrer que pour tout $x, y \in]0,1[$, $|f(x) - f(y)| \leq (p-1)|x-y|$.
   (g) En déduire que :
   $$|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{1-Lh}(|u_n - v_n| + Ch^2),$$
   où $L = p-1$.
   (h) En déduire que pour tout $n \in \{1, ..., N\}$:
   $$|u_n - v_n| \leq Ch^2 \sum_{k=1}^{n} \rho_h^k,$$
   où $\rho_h = \frac{1}{1-Lh}$.
   (i) En déduire que :
   $$|u_n - v_n| \leq \frac{C}{L} h(\exp{(LT + \epsilon(\frac{1}{N}))} - 1),$$
   où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
   (j) Que peut-on en conclure ?