# Chapitre 2

# Équations non linéaires

## 2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la résolution de l'équation

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce problème concernait déjà les mathématiciens de l'antiquité puisque les babyloniens et les grecs s'inéressaient déjà aux racines des polynômes de degré 2. Plus tard, c'est en s'intéressant aux racines des polynômes de degré 2 et 3 que les mathématiciens italiens du seixième siècle, Cardan et Bombelli découvrirent les nombres complexes. On sait aujourd'hui qu'il n'existe pas de formule générale exacte pour calculer les racines des polynômes de degré supérieur ou égal à cinq. Cette remarque permet de comprendre l'intérêt des méthodes numériques. Elles fournissent un outil d'approcher la solution d'un problème que l'on ne sait pas résoudre exactement. Elles permmettent également le calcul d'une solution en un temps réduit. Cependant elles ne remplacent pas la théorie : théorie et simulations sont complémentaires. Les simulations donnent un aspect concret. La reflexion se nourrit des aspects concrets, augmentent la compréhension et guident les nouvelles simulations. Actuellement, la résoluton de l'équation (2.1) préoccupe toujours les mathématiciens : ainsi, les points d'équilibre d'un système dynamique de dimension finie ou infinie, la minimisation d'une fonction ou d'une fonctionnelle peuvent conduire à la résolution d'un problème de type (2.1). Pour introduire ce chapitre, on commence par rappeler le théorème des valeurs intermédiaires qui permet d'assurer l'existence d'une solution à l'équation.

### Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1** (des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f$ une fonction continue, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que*

$$f(a)f(b) < 0.$$

*Alors il existe $l \in ]a, b[$ tel que*

$$f(l) = 0.$$

*Démonstration.* On utilise la méthode de dichotomie. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Puis,

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- Si $f(c_n) = 0$, on s'arrête.
- Si $f(c_n)f(a_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.
- Et si $f(c_n)f(a_n) < 0$, $b_{n+1} = c_n$, $a_{n+1} = a_n$.

Les suites $a_n, b_n, c_n$ ainsi définies vérifient :

- $a_n$ est croissante majorée, $b_n$ est décroissante minorée.
- $(b_n - a_n) = \frac{(b-a)}{2^n}$.

On en déduit que $a_n$, $b_n$ convergent vers une même limite $l$. Par ailleurs on a

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

et par passage à la limite

$$(f(l))^2 \leq 0.$$

Donc

$$f(l) = 0$$

□

### Théorème d'existence d'un point fixe

Un autre théorème joue un rôle important en analyse, il d'agit du théorème de point fixe. On donne ici ce résulta dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais il faut savoir que ce théorème admet des généralisations dans $\mathbb{R}^n$ et dans des espaces plus abstraits.

**Théorème 2** (Existence d'un point fixe)**.** *Soit $g$ une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g([a, b]) \subset ([a, b])$. Alors il existe $l \in [a, b]$ tel que*

$$g(l) = l$$

*Démonstration.* On pose

$$f(x) = g(x) - x$$

et on applique le théorème précédent à la fonction $f$. □

## 2.2 Les méthodes itératives classiques

Nous avons démontré en introduction l'existence d'une solution de l'équation (2.1). Il faut maintenant chercher à calculer cette solution effectivement. Nous savons résoudre les équations du premier et second degré, et avec un peu plus de technique les équations de degré 3 et 4. Mais pour le reste, en général on ne sait pas calculer les solutions de manière exacte. Il est donc nécessaire de développer des méthodes qui vont approcher les solutions. Nous allons présenter dans ce chapitre les méthodes itératives classiques. Elles permettent de construire une suite destinée à converger vers une solution de (2.1). Plus précisément nous introduirons les méthodes de dichotomie, de la corde, de Régula Falsi, de Lagrange et de Newton. Hormis la méthode de dichotomie qui a été utilisée dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, toutes ces méthodes reposent sur la résolution, d'une équation linéaire approchant (2.1). Plus précisément, supposons la suite $x_n$ construite jusqu'à l'ordre $n$, on approche $f(x_{n+1})$ par une fonction affine :

$$f(x_{n+1}) \simeq f(x_n) + \alpha_n(x_{n+1} - x_n)$$

où $\alpha_n$ est une approximation de $f'(x_n)$.
Et puisque l'on aimerait que $f(x_{n+1})$ soit proche de 0, on résoud :

$$f(x_n) + \lambda_n(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Ce qui donne

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\lambda_n}.$$

### 2.2.1 Méthode de dichotomie

On suppose que $f$ est continue et que $f(a)f(b) < 0$. La méthode de dichotomie est la méthode constructive utilisée dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. On effectue :

$$a_0 = a, b_0 = b.$$

Puis,

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- Si $f(x_n) = 0$, on s'arrête.
- Si $f(x_n)f(a_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$.
- Et si $f(x_n)f(a_n) < 0$, $b_{n+1} = x_n$, $a_{n+1} = a_n$.

Cette méthode assure la convergence de la suite $(x_n)$ vers une solution de l'équation (2.1), dès que $f(a)f(b) < 0$. Remarquez toutefois que le problème peut avoir plusieurs solutions, et l'algorithme converge donc vers une des solutions.

### 2.2.2 Méthode de la corde

La méthode de la corde, consiste à choisir

$$\lambda_n = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On remplace donc l'équation

$$f(x_{n+1}) = 0,$$

par l'équation,

$$f(x_n) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Ce qui donne :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x_n).$$

Soit $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b)$. Soit $X_n = (x_n, f(x_n))$ et $\Delta_n$ la droite parallèle à $(AB)$ passant par $X_n$. Géométriquement, $x_{n+1}$ est l'abscisse du point d''intersection entre $\Delta_n$ et l'axe des abscisses. Avec cette méthode, on n'est pas assuré de la convergence vers une solution mais certaines hypothèses permettent d'assurer la convergence.

### 2.2.3 Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange consiste à choisir

$$\lambda_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

On remplace donc l'équation

$$f(x_{n+1}) = 0,$$

par l'équation,

$$f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Ce qui donne :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Soit $X_n = (x_n, f(x_n))$, et $X_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. Soit $\Delta_n$ la droite passant par $X_{n-1}$ et $X_n$. Géométriquement, $x_{n+1}$ est l'abscisse du point d'intersection entre $\Delta_n$ et l'axe des abscisses.

Comme pour la méthode de la corde, cette méthode n'assure pas la convergence vers une solution.

### 2.2.4 Méthode regula falsi

Cette méthode se base sur les principes utilisés dans les méthodes de Lagrange et de dichotomie. Soit $a_0$ et $b_0$ tels que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Soit $x_n$ tel que

$$0 = f(a_n) + \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x_n - a_n)$$

C'est à dire,

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n).$$

- Si $f(x_n) = 0$, on s'arrête.
- Si $f(x_n)f(a_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$.
- Si $f(x_n)f(a_n) < 0$, on pose $b_{n+1} = x_n$, $a_{n+1} = a_n$ .

Soit $A_n = (a_n, f(a_n))$, $B_n = (b_n, f(b_n)$ et soit $\Delta_n$ la droite passant par les points $A_n$ et $B_n$. Géométriquement, $x_n$ est l'abscisse du point d'intersection entre $\Delta_n$ et l'axe des abscisses. On peut écrire cette méthode sous la forme :
$x_{-1} = a_0, x_0 = b_0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_p}{f(x_n) - f(x_p)}(f(x_n)$$

où $p$ est le plus grand entier inférieur à $n$, vérifiant :

$$f(x_p)f(x_n) < 0.$$

En effet, à la première étape $p = -1$, on déroule ensuite l'algorithme et la valeur de $p$ ne change que lorsque $f(x_p)f(x_n) > 0$, ce qui implique que $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$. Et alors $p$ devient $n - 1$. Tant que $f(x_p)f(x_n) < 0$, on construit des nouveaux points avec $x_p$, ce qui signifie que $f(x_k)f(x_n) > 0$ pour $k \in \{p + 1, ..., n - 1\}$. On peut décrire l'algorithme de cette manière : On initialise avec $p = -1, n = 0$, puis on itère,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_p}{f(x_n) - f(x_p)}(f(x_n).$$

Si $f(x_p)f(x_n + 1) > 0$ alors $p = n$.

### 2.2.5 Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à choisir,

$$\lambda_n = f'(x_n)$$

On remplace donc la résolution de $f(x_{n+1}) = 0$ par la résolution de,

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

On obtient alors

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Soit $\Delta_n$ la tangente à la courbe représentatice de $f$ au point d'absisse $x_n$. Alors $x_{n+1}$ est l'abscisse du point d'intersection entre $\Delta_n$ et l'axe des abscisses. L'algorithme de Newton n'assure pas la convergence vers une solution de (2.1). On donnera dans le cours des conditions assurant cette convergence.

## 2.3 La méthode du point fixe

Le théorème 2 assure l'existence d'un point fixe, c'est à dire une solution de l'équation

$$g(x) = x. \tag{2.2}$$

Mais comme pour les zéros d'une fonction, il n'est en général pas possible de calculer explicitement la valeur du point fixe. Comme précédemment on va donc construire une suite d'éléments qui vont approcher une solution.

**Théorème 3** (Condition suffisante de convergence globale de la méthode du point fixe)**.** *Soit $g$ une fonction de classe $C^1$ sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que $g([a, b]) \subset [a, b]$ et qu'il existe $k$, $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|g'(x)| < k$, alors :*

1. *la fonction $g$ admet un unique point fixe $l$ dans $[a, b]$.*
2. *pour tout $x_0$ de $[a, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence*

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

*vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [a, b] \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = l.$$

*Démonstration.* Puisque la fonction $g$ est continue et que $g([a, b]) \subset [a, b]$, le théorème 2 assure l'existence d'un point fixe. Soient $l_1$ et $l_2$ deux points fixes de $g$. D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$|l_1 - l_2| = |g(l_1) - g(l_2)| \le k|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2| \text{ dès que } l_1 \ne l_2.$$

Donc, $l_1 = l_2$ et le point fixe est unique. Le fait que $x_n \in [a, b]$ résulte du fait que $g([a, b]) \subset [a, b]$. Par ailleurs pour tout $n > 0$,

$$|x_n - l| = |g(x_{n-1}) - l| = |g(x_{n-1}) - g(l)| \leq k|x_{n-1} - l|$$

On montre ainsi par récurrence que

$$|x_n - l| \leq k^n |x_0 - l|$$

Puisque $0 < k < 1$, cela implique que,

$$\lim_{n \to +\infty} |x_n - l| = 0.$$

□

Les hypothèses du théorème 3 sont assez fortes. Le théorème suivant assure la convergence de la suite $x_n$ vers le point fixe $l$ lorsque le premier terme est choisi dans un voisinage assez petit autour de $l$.

**Théorème 4** (Condition suffisante de convergence locale de la méthode du point fixe)**.** *Soient $l \in \mathbb{R}$ et $g$ une fonction de classe $C^1$ définie sur un voisinage de $l$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, on définit la suite $x_n$ par la récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$. Alors, si $g(l) = l$ et $|g'(l)| < 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0$ appartenant à l'intrevalle $I = [l - \alpha, l + \alpha]$, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in I \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_n = l.$$

*Enfin, $l$ est l'unique solution de l'équation* (2.2) *sur $I$.*

*Démonstration.* On a que

$$|g'(l)| < 1.$$

Donc par continuité de $g'$, il existe $\alpha > 0$ que pour tout $x$ dans $I = [l - \alpha, l + \alpha]$,

$$|g'(x)| < 1 \text{ sur } I.$$

Mais comme $I$ est un intervalle fermé et borné, alors il existe $k \in ]0, 1[$ tel que $|g'(x)| < k$ sur $I$. Par ailleurs le théorème des accroissements finis entraîne que

$$|g(x) - l| = |g(x) - g(l)| \leq \sup_{x \in I} |g'(x)||x - l| \leq k|x - l| < \alpha$$

On en déduit que $g(I) \subset I$. On peut donc appliquer le théorème 3 dans l'intervalle $I$. Ce qui donne la convergence de la suite et l'unicité du point fixe dans $I$. □

## 2.4 Convergence des méthodes de Newton, de la corde et de Lagrange

### 2.4.1 Convergence de la méthode de Newton

Pour $x_0$ donné, on définit la suite des itérés de Newton par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**Condition suffisante de convergence pour la méthode de Newton**

**Théorème 5.** *On suppose que :*
- $f$ *est de classe* $C^2$ *sur* $[a, b]$
- $f(a)f(b) < 0$
- $f' \neq 0$ *sur* $[a, b]$
- $f'' > 0$ *sur* $[a, b]$.

*Alors si* $x_0$ *vérifie* $f(x_0) > 0$*, la suite des itérés de Newton converge vers l'unique solution* $l$ *de* (2.1) *sur cet intervalle.*

*Démonstration.* On suppose $f' > 0$ sur $[a, b]$, le cas $f' < 0$ se traite de manière analogue. D'après les hypothèses $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Donc, il existe un unique $l \in ]a, b[$ solution de $f(x) = 0$. Le fait que $x_{n+1}$ soit plus grand que $l$ est dû au fait que $f$ est convexe. En effet puisque $f$ est convexe, sa courbe est au dessus de des tangentes. Donc la tangente coupe l'axe des abscisses en un point situé à droite de $l$. D'un point de vu analytique, on a d'après la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, que pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\xi_n \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

Donc, comme $f'' > 0$ pour tout $x \neq x_n$, on a :

$$f(x) > f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Ce qui donne pour $x = l$ :

$$0 = f(l) > f(x_n) + f'(x_n)(l - x_n)$$

Comme $x_{n+1}$ vérifie

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

On déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ que

$$l < x_{n+1} < x_n$$

Par récurrence, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée, donc elle converge. Soit $x_*$ sa limite. Alors de l'équation,

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

on déduit par passage à la limite que

$$f(x_*) = 0.$$

□

**Remarque 1.** *Le théorème admet une version analogue dans le cas $f'' < 0$ sur $[a, b]$, $f(x_0) < 0$,*

**Remarque 2.** *Dans le théorème, on a l'hypothèse que $f(x_0) > 0$, si $f' > 0$ cela veut dire que $x_0 > l$. Si on choisit $x_0 < l$, alors du fait de la convexité ($f'' > 0$), on aura $x_1 > l$. Pour avoir la convergence, il suffit alors de vérifier que $x_1 \leq b$. Ceci est assuré par la condition suivante : $a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b$. On résume cela dans le théorème suivant.*

**Théorème 6.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus que*

$$f' > 0 \text{ et } a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b$$

*alors pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite des itérés de Newton converge vers $l$.*

*Démonstration.* Pour $l < x_0 < b$, le résultat découle du théorème précédent. Pour $a < x_0 < l$, du fait de la convexité et de la croissance de $f$, $x_1$ est une fonction décroissante de $x_0$. En effet, en posant :

$$x_1 = \phi(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On trouve, en dérivant par rapport à $x_0$,

$$\phi' = 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2} = \frac{ff''}{(f')^2} < 0.$$

□

**Exercice 4.** Enoncer un résultat analogue dans le cas où $f' < 0$.Puis dans le cas $f'' > 0$ et $f' > 0$, $f'' < 0$ et $f' < 0$.

Comme pour la méthode du point fixe, la méthode de Newton assure la convergence dans le cas où l'on se situe dans un voisinage assez petit de la solution. C'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 7.** *Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Supposons qu'il existe $l \in [a,b]$ tel que $f(l) = 0$ et $f'(l) \neq 0$. Alors, il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [l-\mu, l+\mu]$, la suite des itérés de Newton converge vers $l$ quand $n$ tend vers $+\infty$.*

Avant de montrer le théorème, on montre d'abord le lemme suivant.

**Lemme 1.** *Soit $r_n$ une suite telle que,*

$$0 \leq r_{n+1} \leq r_n^2 \text{ et } 0 < r_0 < 1.$$

*Alors,*

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = 0.$$

*Démonstration.* On montre par récurrence que,

$$0 \leq r_n \leq r_0^{2^n}.$$

D'où le résultat. □

On va maintenant démontrer le théorème.

*Démonstration.* On a,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - l =& x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - l \\ =& \frac{f'(x_n)(x_n - l) - f(x_n) + f(l)}{f'(x_n)} \\ =& \frac{f''(\xi_n)(l - x_n)^2}{2f'(x_n)} \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $\alpha$ tel que si $x_n \in ]l-\alpha, l+\alpha[$ alors,

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{L}{2m}(x_n - l)^2.$$

Ou encore,

$$\frac{L}{2m}|x_{n+1} - l| \leq \frac{L^2}{4m^2}(x_n - l)^2.$$

Si on choisit, $x_0$ tel que :

$$\frac{L}{2m}|x_0 - l| < \min(1, \alpha\frac{L}{2m}),$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in ]l - \alpha, l + \alpha[$ et la suite $r_n = \frac{L}{2m}|x_n - l|$ vérifie,

$$0 \leq r_{n+1} \leq r_n^2.$$

D'où le résultat. □

### 2.4.2 Convergence de la méthode de Lagrange

**Théorème 8.** *On supppose que :*
- $f$ *est de classe* $C^2$ *sur* $[a, b]$
- $f(a)f(b) < 0$
- $f' \neq 0$ *sur* $[a, b]$
- $f'' > 0$ *sur* $[a, b]$.

*Alors si* $x_0, x_1$ *vérifient* $f(x_0) > 0$ *et* $f(x_1) > 0$*, la suite des itérés de Lagrange converge vers l'unique solution* $l$ *de* (2.1) *sur cet intervalle.*

*Démonstration.* On suppose $f' > 0$ sur $[a, b]$, le cas $f' < 0$ se traite de manière analogue. D'après les hypothèses $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Donc, il existe un unique $l \in ]a, b[$ solution de $f(x) = 0$. D'après la convexité de $f$ :

$$0 = f(l) > f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(l - x_n)$$

(f est au dessous de ses cordes et $l \notin [x_n, x_{n-1}]$ ) Donc $x_n > x_{n+1} > l$. Donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée, donc elle converge. Soit $x_*$ sa limite. Alors de l'équation,

$$f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1}}{x_n - x_{n-1})}(x_{n+1} - x_n) = 0$$

on déduit par passage à la limite que

$$f(x_*) = 0.$$

□

**Théorème 9.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus que*

$$f' > 0 \text{ et } a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b$$

*alors pour tout* $x_0, x_1 \in [a, b]$*, la suite des itérés de Lagrange converge vers* $l$*.*

*Démonstration.* On vérifie d'abord que la suite des itérés de Lagrange appartient à l'intervalle $[a, b]$.

Puisque $f$ est convexe et $f' > 0$, pour tout $a \leq x < y \leq b$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > f'(x).$$

Sans perte de généralité on suppose que $x_{n-1} < x_n < l$, les autres cas pouvant se ramener à celui-ci. Alors,

$$\begin{aligned} x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) <& x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ <& a - \frac{f(a)}{f'(a)} \\ <& b. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la suite converge. On suppose $x_0 < x_1 < l$. Alors puisque $f$ est convexe,

$$0 = f(l) > f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(l - x_0).$$

Et donc, $x_2 > l$. Puis de manière analogue, $x_3 < l$. Mais,

$$\begin{aligned} x_3 =& x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2) \\ =& x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_1) \\ > x_1. \end{aligned}$$

Puis de manière analogue, $x_4 < l$ et $x_4 > x_3$. Puis, $l < x_5 < x_2$, $x_4 < x_6 < x_7 < l$. Alors on montre par récurrence que les sous-suites, $x_0, x_1, x_3, x_4, ..., x_{3p}, x_{3p+1}, ...$ et $x_2, x_5, ..., x_{3p+2}, ...$,sont respectivement croissantes, majorées et décroissantes minorées. Elles convergent donc vers deux limites $l_1$ et $l_2$. Par passage à la limite dans l'équation,

$$f(x_{3p}) + (x_{3p+1} - x_{3p}) \frac{f(x_{3p}) - f(x_{3p-1})}{x_{3p} - x_{3p-1}} = 0,$$

on trouve

$$f(l_1) = 0.$$

puis par passage à la limite dans l'équation

$$f(x_{3p+1}) + (x_{3p+2} - x_{3p+1}) \frac{f(x_{3p+1}) - f(x_{3p})}{x_{3p+1} - x_{3p}} = 0,$$

on trouve,

$$l_2 = l_1.$$

□

### 2.4.3 Convergence de la méthode de la corde

La méthode de la corde s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(x_n).$$

La suite des itérés de la méthode de la corde peut donc s'écrire comme une siute des itérés de la méthode du point fixe :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

avec,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda} \text{ et} \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

D'après le théorème 3, pour que la méthode de point fixe converge, il suffit que :

1. $g([a,b]) \subset [a,b]$
2. $g'(x) < 1$ sur $[a,b]$.

La première condition s'écrit :

$$g(x) \geq a \text{ et } g(x) \leq b.$$

Si $\lambda > 0$, on trouve :

$$\begin{gathered} a \leq g(x) \leq b \\ \Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ \Leftrightarrow \lambda(x-b) \leq f(x) \leq \lambda(x-a) \end{gathered}$$

Si $\lambda < 0$, on trouve :

$$\begin{gathered} a \leq g(x) \leq b \\ \Leftrightarrow \lambda(x-a) \leq f(x) \leq \lambda(x-b). \end{gathered}$$

Ou encore pour $\lambda$ quelconque non nul :

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) < f(x) < \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)).$$

Pour la deuxième condition, on a :

$$\begin{aligned}
&|g'(x)| < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2
\end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$, on trouve :

$$0 < f'(x) < 2\lambda.$$

Si $\lambda < 0$, on trouve :

$$2\lambda < f'(x) < 0.$$

Ou encore pour $\lambda$ quelconque non nul :

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda).$$

On a donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 1.** *On suppose que $f$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$ et*

- *pour tout $x \in [a, b]$*
$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) < f(x) < \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b))$$
- *pour tout $x \in [a, b]$*
$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda)$$

*Alors la méthode de la corde converge vers l'unique solution $l$ dans $[a, b]$.*

**Exercice 5.** Déterminer une fonction qui vérifie les hypothèses de la proposition précédente. Donner une représentation graphique de cette fonction. Déterminer une fonction qui ne vérifie pas la pemière hypothèse. La seconde.

## 2.5 Vitesse de convergence

**Définition 1.** *Soit une suite réelle $u_n$ convergeant vers $l$. On appelle erreur de rang $n$, le réel $e_n$ défini par*

$$e_n = |u_n - l|.$$

**Définition 2.** *On dit que la convergence de $(u_n)$ vers $l$ est d'ordre $p$ ($p \in \mathbb{R}_+^*$) si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = C.$$

**Définition 3.** *Lorsque $p = 1$, la convergence de $u_n$ vers $l$ est dite linéaire. Lorsque $p = 2$, la convergence de $(u_n)$ vers $l$ est dite quadratique.*

### 2.5.1 Vitesse de convergence de la méthode du point fixe

**Théorème 10.** *(Vitesse de convergence de la méthode du point fixe)*
*Soit $g$ une fonction de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $l \in I$. On suppose que la suite $x_n$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N} x_n \in I \textit{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

*Alors la convergence de la méthode du point fixe est au moins linéaire.*

*Démonstration.* On a

$$e_{n+1} = x_{n+1} - l = g(x_n) - g(l) = g'(l)e_n + e_n\epsilon(n)$$

où $\epsilon(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = g'(l)$$

Donc dès que $g'(l) \neq 0$ la convergence est d'ordre 1. □

**Proposition 2.** *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si on suppose de plus que $g'(l) = 0$ et que $g$ est de classe $C^2$ alors si $g''(l)$ est non nul la convergence est quadratique. Plus généralement, si pour tout $k$ vérifiant $1 \leq k \leq n-1, g^{(k)}(l) = 0$, et si $g$ est de classe $C^n$ sur $I$. alors la convergence est d'ordre $n$.*

*Démonstration.* D'après la formule de Taylor Young, on a :

$$\begin{array}{rcl} e_{n+1} & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(l)}{k!} e_n^k + e_n\epsilon(n) \\ & = & \frac{g^{(n)}(l)}{n!} e_n^n + e_n^n \epsilon(n) \end{array}$$

D'où le résultat. □

### 2.5.2 Vitesse de convergence de la méthode de Newton

**Théorème 11.** *On suppose que $f'(l) \neq 0$, alors si la suite $(x_n)$ des itérés de Newton converge, sa vitesse de convergence est (au moins) quadratique.*

*Démonstration.* On a

$$x_{n+1} - l = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - l$$

ou encore

$$x_{n+1} - l = \frac{(x^n - l)f'(x_n) - f(x_n) + f(l)}{f'(x_n)}$$

Par application de la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2, on sait que, $\exists \xi_n$ compris entre $x_n$ et $l$ tel que

$$f(l) - f(x_n) = f'(x_n)(l - x_n) + f''(\xi_n)\frac{(l - x_n)^2}{2}$$

On a donc,

$$x_{n+1} - l = \frac{(x^n - l)f'(x_n) - f(x_n) + f(l)}{f'(x_n)}$$

$$= f''(\xi_n)\frac{(l - x_n)^2}{2} f'(x_n)$$

On a donc :

$$\frac{e_{n+1}^2}{e_n^2} \to \frac{f''(l)}{f(l)} \text{ quand } n \to +\infty$$

□

### 2.5.3 Vitesse de convergence de la méthode de la corde

On a également par application du théorème 10 :

**Proposition 3.** *Si la méthode de la corde converge, alors la convergence est au moins linéaire. Si toutefois,* $f'(l) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *alors la convergence est au moins quadratique.*

### 2.5.4 Vitesse de convergence de la méthode de Lagrange

**Théorème 12.** *Si la suite des itérés de Lagrange converge, alors sa convergence est d'ordre* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

## 2.6 Accélération de la méthode du point fixe

Soit $x_n$ une suite définie par :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

On suppose que la suite converge vers un nombre $l$. On va chercher à augmenter la vitesse de convergence de cette suite.

### 2.6.1 La suite du $\Delta^2$ d'Aitken

Par application du théorèmes de accroissements finis, on a

$$g(x_n) - g(l) = g'(\xi_n)(x_n - l)$$

pour un $\xi_n$ dans l'intervalle $(l, x_n)$. Ce qui équivaut à

$$x_{n+1} - l = g'(\xi_n)(x_n - l)$$

On résout cette équation en $l$, on trouve :

$$l = \frac{x_{n+1} - g'(\xi_n)x_n}{1 - g'(\xi_n)}$$

ce qui s'écrit encore

$$l = x_{n+1} + \frac{g'(\xi_n)}{1 - g'(\xi_n)}(x_{n+1} - x_n)$$

ou

$$l = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{1}{g'(\xi_n)} - 1}$$

On approche $g'(\xi_n)$ par $\lambda_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}$. On pose $q_n = \frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n}$.

**Définition 4.** *On appelle suite des accélérés de $(x_n)$ la suite $(a_n)$ définie par*

$$a_n = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{q_n - 1}$$

**Remarque 3.** *Par construction, le réel $a_n$ est point fixe de la fonction affine $p_{1,n}(x)$ définie par*

$$p_{1,n}(x) = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

**Remarque 4.** *Graphiquement, $a_n$ se situe donc à l'intersection de la droite $y = x$ et de la droite passant par $(x_{n-1}, x_n)$ et $(x_n, x_{n+1})$.*

#### La suite du $\Delta^2$ d'Aitken

$$\begin{aligned}
a_n &= x_{n+1} + \tfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_{n+1} - x_n) \\
&= x_{n+1} + \frac{\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}}{1-\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}}(x_{n+1} - x_n) \\
&= x_{n+1} - \tfrac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}}
\end{aligned}$$

**Définition 5.** *Étant donné une suite $u_n$, on définit la suite $\Delta u_n$ par :*

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

En notant $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, on a

$$\Delta^2(u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

Avec les notations précédentes, la suite $a_n$ des itérés accélérés est définie par

$$a_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2(x_{n-1})}$$

ce qui justifie le nom donné à la méthode.

On énonce maintenant le théorème suivant qui montre l'accélération de la vitesse de convergence par les itérés d'Aitken

**Théorème 13.** *On suppose que $g'(l) \neq 1$ alors la suite $(a_n)$ converge plus rapidement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens suivant :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - l}{x_n - l} = 0$$

*Démonstration.* On a

$$a_n = \frac{x_{n+1} - \lambda_n x_n}{1 - \lambda_n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{a_n-l}{x_n-l} &= \frac{\frac{x_{n+1}-\lambda_n x_n}{1-\lambda_n}-l}{x_n-l} \\
&= \frac{1}{1-\lambda_n}\frac{x_{n+1}-\lambda_n x_n-l(1-\lambda_n)}{x_n-l} \\
&= \frac{1}{1-\lambda_n}\frac{x_{n+1}-l-\lambda_n(x_n-l)}{x_n-l} \\
&= \frac{1}{1-\lambda_n}\left(\frac{x_{n+1}-l}{x_n-l} - \lambda_n\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - l}{x_n - l} = g'(l)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = g'(l)$$

Donc, en supposant que $g'(l) \neq 1$, on a que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - l}{x_n - l} = 0$$

□

## 2.7 La méthode de Muller

### 2.7.1 Principe de la méthode

On initialise la suite par les valeurs $x_0, x_1, x_2$. À chaque itération, le nouvel élément de la suite $x_n$ est calculé en résolvant l'équation suivante :

$$P_{2,n}(x) = 0 \tag{2.3}$$

où $P_{2,n}(x)$ est le polynôme de degré deux passant par les points $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$.

### 2.7.2 Lemmes techniques

On définit

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

et

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{x_{n-2} - x_n}(f[x_{n-1}, x_{n-2}] - f[x_n, x_{n-1}])$$

**Lemme 2.** *Soit $p_{2,n}$ le polynôme de degré $2$ passant par les points $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$. Alors on a :*

$$p_{2,n}(x) = h(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}])(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

*Démonstration.* On vérifie que

$$h(x_n) = f(x_n), \qquad h(x_{n-1}) = f(x_{n-1})$$

et que

$$\begin{aligned}
h(x_{n-2}) = {} & f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x_{n-2} - x_n) \\
& + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}])(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) \\
= {} & f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x_{n-2} - x_n) + \frac{1}{x_{n-2} - x_n}(f[x_{n-1}, x_{n-2}] \\
& - f[x_n, x_{n-1}])(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) \\
= {} & f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x_{n-2} - x_n - (x_{n-2} - x_{n-1})) \\
& + f[x_{n-1}, x_{n-2}](x_{n-2} - x_{n-1}) \\
= {} & f(x_{n-2})
\end{aligned}$$

$\square$

On a aussi :

**Lemme 3.** *Soit $p_{2,n}$ le polynôme de degré $2$ passant par les points $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$. Alors on a :*

$$p_{2,n}(x) = A(x - x_n)^2 + B(x - x_n) + C$$

*où*

$$\begin{aligned} A &= f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] && (2.4)\\ B &= f[x_n, x_{n-1}] + (x_n - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] && (2.5)\\ C &= f(x_n) && (2.6)\\ & && (2.7) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le polynôme passant par les points $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}), f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$ vérifie :

$$p_{2,n}(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1})$$

En écrivant

$$x - x_{n-1} = x - x_n + x_n - x_{n-1}$$

on trouve que

$$p_{2,n}(x) = f(x_n)+f[x_n, x_{n-1}](x-x_n)+f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x-x_n)^2+f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x-x_n)(x_n-x_{n-}$$

c'est à dire

$$p_{2,n}(x) = f(x_n)+(f[x_n, x_{n-1}]+f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x_n-x_{n-1}))(x-x_n)+f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x-x_n)^2$$

□

**Lemme 4.** *Soit $r_1, r_2$ les racines du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, alors on a :*

$$r_{1,2} = \frac{2c}{b\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

*Démonstration.* Soit

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Alors en multipliant le numérateur et le dénominateur par

$$-b + \sqrt{b^2 - 4ac},$$

on obtient

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ &= \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned}$$

□

### 2.7.3 La méthode de Müller

Avec les notations précédentes, la méthode de Müller, consiste à calculer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à partir des données $x_0, x_1, x_2$ et de l'itération :

$$x_{n+1} = x_n + r_{\min}$$

où $r_{\min}$ est la racine du polynôme d'interpolation de module minimal :

$$p_{2,n}(r_{\min}) = 0 \text{ et } |r_{\min}| = \min(|r_1|, |r_2|).$$

C'est à dire qu'à chaque itération on calcule :

$$\begin{aligned} &A = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \\ &B = f[x_n, x_{n-1}] + (x_n - x_{n-1} f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \\ &C = f(x_n) \end{aligned}$$

Puis,

$$x_{n+1} = x_n + r_{\min}.$$

L2 Méthodes numériques. Université du Havre

**Feuille de TD 2**

**Exercice 1.** On considère l'équation suivante :

$$f(x) = x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 24 = 0 \tag{2.8}$$

1. Faire une étude de la fonction $f$. En déduire le nombre de solutions de l'équation (2.8).
2. Pour chacune des solutions précédentes déterminer une condition initiale telle que la suite des itérés de Newton converge vers cette solution.
3. Que se passe-t-il si $x_0 > 0$ et $x_0$ assez proche de 0 ?

**Exercice 2.** Formules de Cardan

1. Montrer grâce à un changement de variable de la forme $y = x - x_0$ que toute équation cubique

$$y^3 - ay^2 + by + c = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2.9}$$

2. Montrer que si

$$x_1 = u + v, p = -3uv, q = -(u^3 + v^3)$$

alors $x_1$ est solution de (2.10).

3. Écrire $U = u^3$, $V = v^3$ et montrer que $U$ et $V$ sont racines d'une équation quadratique dont on donnera les solutions en fonction de $p$ et $q$.
4. A priori, $U$ et $V$ ont chacun trois racines cubiques, ce qui devrait conduire à neuf combinaisons différentes de la forme $u + v$ : comment un polynôme cubique pourrait il avoir autant de zéros sans être identiquement nul ?

   Montrer que la condition $p = -3uv$ limite à trois choix possibles : donner explicitement trois solutions de (2.10). Il peut être utile d'utiliser les racines cubiques complexes de 1, $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $j^2$, et de distinguer les cas selon le signe de $4p^3 + 27q^2$.

5. Construire un exemple simple d'équation cubique dont les trois racines sont réelles, et dont les formules de cardan utilisent des nombres complexes.

**Exercice 3.**

1. Quels sont les points fixes de

$$g(x) = x - x^3 \text{ sur } I = [-1, 1]\,?$$

Montrer que pour tout $x_0$ appartenant à $I$ la suite des itérés converge vers $0$.

2. Quels sont les points fixes de

$$g(x) = x + x^3 \text{ sur } I = [-1, 1]\,?$$

Montrer que pour tout $x_0 \neq 0$ la suite des itérés tend vers $\pm\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 4.** On considère la fonction $g$ définie par

$$\forall x \in I = [0, 1], g(x) = 2x \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}],\ g(x) = 2(1 - x) \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que $g(I) \subset I$ et que $g$ est continue sur $I$. Que peut on en conclure ?
2. Déterminer tous les points fixes de $g$. Quelles sont les limites possibles de la suite des itérés du point fixe ?
3. Montrer que si la suite des itérés converge alors elle est constante à partir d'un certain rang.
4. Décrire les différents cas possibles de comportement de la suite, et montrer qu'il ne peut y avoir que trois cas possibles : la suite possède une infinité de valeurs distinctes (noté cas a) , la suite est stationnaire après un nombre fini d'itérations (noté cas b)), la suite est cyclique mais non stationnaire (noté cas c)).
5. On cherche maintenant à déterminer le comportement de la suite selon la valeur initiale de la suite $x_0$.
6. Donner une partition de $I$ selon le comportement de la suite, et à l'aide de la fonction $g^p$ (composée p fois de $g$). On note $U$ (resp, $V$, $W$)l'ensemble des conditions initiales telles que les cas a) (resp b),c)) ait lieu.
7. On admet l'expression suivante pour la fonction $g^p$, pour $p \geq 1$, et pour $i \in \{0, 2, 4, ..., 2^p - 4, 2^p - 2, 2^p\}$

$$g^p(x) = 2^p(x - \frac{i}{2^p}) \text{ si } x \in [\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}], g(x) = 2^p(-x + \frac{i+2}{2^p}) \text{ si } x \in [\frac{i+1}{2^p}, \frac{i+2}{2^p}]$$

Montrer que

$$V = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} V_p$$

où

$$v_0 = \{0, \frac{2}{3}\},\ \forall p \in \mathbb{N}^*, V_p = \{\frac{l}{3.2^{p-1}} : l \in 0, ..., 2^{p-1}\}.$$

Montrer que $V$ est dénombrable.

8. Peut on déterminer $W$ de façon explicite ? Pourquoi est il inclus dans $\mathbb{Q}$ ? Montrer que $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{84}$ appartiennent à $\mathbb{Q}$.
9. Pourquoi les irrationnels de $I$ appartiennent à $U$ ?
10. Soi $g$ définie sur $I$ par

$$g(x) = -4x^2 + 4x.$$

Peut on prévoir le même type de comportement que pour l'équation précédente ?

L2. Méthodes numériques. Université du Havre

**Feuille de TP 2**

**Exercice 1.** Dans un fichier nommé $TP2.sci$, implémenter toutes les méthodes itératives classiques introduites en cours pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

**Exercice 2.** On cherche à trouver les solutions de l'équation

$$f(x) = x^2 - 1764 = 0 \tag{2.11}$$

1. Déterminer les solutions de (2.11).
2. Représenter graphiquement la courbe représentative de $f$.
3. Pour chaque méthode, déterminer des paramètres permettant de trouver une valeur $x_n$ vérifiant $x_n > 0$ et $|f(x_n)| < 10^{-2}$, ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir le résultat. Vous noterez les résultats de vos simulations dans un fichier dédié.
4. Utiliser une fonction scilab pour déterminer les solutions de l'équation (2.11).

**Exercice 3.** On cherche à trouver les solutions de l'équation

$$f(x) = x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 24 = 0 \tag{2.12}$$

1. Faire une étude de la fonction $f$ (calcul de la dérivée et tableau de variation) et en déduire le nombre de solutions de l'équation (2.12).
2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de $f$.
3. Pour chaque méthode, et pour chaque solution de $f(x) = 0$, déterminer des paramètres permettant de trouver une valeur approchée $x_n$ de la solution de (2.12), vérifiant $|f(x_n)| < 10^{-2}$, ainsi que le nombre d'itérations nécessaires. Vous noterez les résultats de vos simulations dans un fichier dédié. Vous conserverez aussi les cas où la suite ne converge pas, ou si le résultat obtenu n'est pas celui que vous attendiez.
4. Utiliser une fonction Scilab pour déterminer les solutions de l'équation (2.12).

L2. Méthodes numériques. Université du Havre

**Feuille de TP3**

Soit $g(x)$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$g(x) = \mu x(1 - x), \qquad \mu \in [0, 4]. \tag{2.13}$$

On s'intéresse à la convergence de la méthode du point fixe, qui définit la suite $x_n$ par :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

1. On suppose que $\mu < 1$

   (a) Déterminer les points fixes de $g$.

   (b) Pour toute valeur de $x_0$, déterminer en utilisant les résultats du cours le comportement de la suite définie par l'algorithme du point fixe.

   (c) Représenter graphiquement les fonctions $g(x)$ et $x$, et déterminer pour un $x_0$ fixé les premières valeurs de la suite $x_n$.

   (d) Implémenter une fonction scilab $pointfixe(x_0, nmax, eps)$ construisant la suite des itérés des points fixes, jusqu'à ce que $|g(x) - x| < eps$ ou que le l'on ait atteint un nombre d'itération supérieur ou égal à nmax. La fonction devra également récupérer toutes les valeurs de la suite dans un fichier texte.

   (e) Pour quelques valeurs de $\mu$ et quelques valeurs de $x_0$, lancer l'algorithme de point fixe. Conserver les résultats de vos simulations dans un fichier.

2. On suppose que $1 \leq \mu \leq 2$

   (a) Déterminer les points fixes de $g$.

   (b) Les théorèmes du cours vous permettent ils de conclure sur la convergence de la suite $x_n$ ? Justifier votre réponse.

   (c) Étudier théoriquement le comportement de la suite et étayer vos raisonnements par des simulations numériques.

3. On suppose que $2 < \mu \leq 4$

   (a) Déterminer les points fixes de $g$.

(b) Dans les cas $\mu = 2.5, 3.1, 3.49, 3.55, 3.57, 3.8, 3.9, 4$. Lancer l'algorithme de point fixe sur quelques valeurs de $x_0$ que vous aurez choisies. Récupérer toutes les suites obtenues dans des fichiers textes.

(c) En observant les suites obtenues essayez de formuler des hypothèses sur le comportement asymptotique de la suite $x_n$.

L2. Méthodes numériques. Université du Havre

**Feuille de TP4**

Le but de ce TP est d'implémenter les méthodes itératives de base vues en cours ainsi que d'évaluer numériquement leur vitesse de convergence.

On considère l'équation suivante

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0, \tag{2.14}$$

1. (a) Montrer que cette équation admet une unique solution $l$ comprise entre 1 et 2.

   (b) On veut maintenant donner une estimation numérique des ordres de convergence des différentes méthodes. Vérifier que pour une méthode d'ordre $p$ on a
   $$\ln e_{n+1} \simeq p \ln e_n + M$$
   On va maintenant utiliser ce résultat pour donner une estimation numérique de la convergence.

   (c) Modifier si nécessaire le fichier TP2.sci, de manière à récupérer les itérés des méthodes de la corde, de Lagrange et de Newton dans les fichiers de données : Corde.dat, Lagrange.dat et Newton.dat.

   (d) Écrire un script TP4.sce qui récupère les itérés de la métode de la corde, puis représente le nuage de points $(\ln(e_{n+1}), \ln(e_n))$ et renvoie les paramètres $p$ et $M$ de la régression linéaire approchant ce nuage de points. Procéder de même pour les méthodes de Lagrange et de Newton.

   (e) Comparer ces résultats numériques avec les résultats théoriques vus en cours.

2. On considère maintenant l'équation

   $$g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} = x, \tag{2.15}$$

   (a) Montrer que $\forall x_0 \in [1, 2]$, l'algorithme du point fixe converge vers $l$.

   (b) A l'aide du logiciel scilab, implémenter la méthode du point fixe et donner une valeur approchée de $l$.

(c) Accélération de la convergence.
Implémenter la méthode d'Aitken. On cherchera à garder toutes les valeurs prises par les suites (celles données par la méthode de point fixe et celles données par la méthode d'Aitken) et à les conserver dans un fichier de données.

(d) Comparer les valeurs prises par les deux suites.