Chapitre 3

Méthodes directes de résolution du système linéaire $Ax = b$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie quelques méthodes directes permettant de résoudre le système

$$Ax = b \tag{3.1}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées à $n \times n$ coefficients réels, et $b \in \mathbb{R}^n$. Une méthode directe est une méthode qui permet de résoudre le système 3.1 en un nombre fini d'opérations et en arithmétique exacte. Dans ce chapitre, on présente les méthodes suivantes :

- la méthode d'élimination de Gauss,
- la méthode de la décomposition LU,
- la méthode de Cholesky,
- la méthode de la factorisation QR.

3.2 Méthode d'élimination de Gauss

L'idée de cette méthode est de se ramener à un système linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure, on obtient ensuite la solution par simple remontée.
Exemple

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+3z+t & = & 15 \\ -4x-6y+3z+2t & = & 3 \\ -x+y+z+t & = & 5 \\ -2x-y+z+t & = & 1 \end{array}\right. \tag{3.2}$$

La méthode de Gauss, consiste à éliminer x des lignes $2, 3, 4$, puis y des lignes $3, 4$, puis z de la ligne 4. On obtient alors la valeur de t et on en déduit les autres valeurs en remontant. Le système (3.2) s'écrit sous forme matricielle $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Étape 1</u>

On pose $A_1 = A$ et on note $a^1_{i,j},\ 1 \le i \le 4, 1 \le j \le 4$ l'élément (i,j) de la matrice A. Lorsqu'il est non nul, on nomme pivot (de la première étape) l'élément $a^1_{1,1}$. Ici, $a^1_{1,1} = 2$. On effectue alors pour toute ligne $L_i, 2 \le i \le 4$:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a^1_{i,1}}{a^1_{1,1}} L_1$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ \frac{25}{2} \\ 16 \end{pmatrix}.$$

<u>Étape 2</u>

On note A_2 la matrice obtenue. Maintenant, le pivot $a^2_{2,2}$ de la nouvelle matrice est nul. On échange la deuxième et la troisième ligne. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{25}{2} \\ 33 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Le pivot est maintenant $a^2_{2,2} = \frac{5}{2}$. On effectue :

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a_{4,2}}{a_{2,2}} L_2 = L_4 - \frac{4}{5} L_2$$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{25}{2} \\ 33 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Étape 3
On obtient la matrice A_3. Le pivot est maintenant l'élément $a_{3,3}^3 = 9$. On effectue :

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} L_3 = L_4 - \frac{2}{9} L_3.$$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{25}{2} \\ 33 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Étape 4
La matrice obtenue est maintenant triangulaire supérieure, et on peut résoudre le système par remontée. On trouve :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Algorithme
De l'exemple précédent on peut tirer l'algorithme suivant :
Pour k allant de 1 à $n-1$
Si tous les éléments sous le pivot dans la colonne k est nulle, passer à la colonne suivante.
Si l'élément $a_{k,k}$ est nul, et si il existe un élement non nul, sous le pivot, dans la colonne k, permuter la ligne i avec la ligne k où i est le plus petit entier supérieur à k tel que $a_{i,k}$ soit non nul.
Ensuite, pour tout $i > k$, effectuer l'opération

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} L_k.$$

Théorème 14. *Soit A une matrice carrée (inversible ou non). Il existe au moins une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure.*

Démonstration. La démonstration consiste en l'écriture de la méthode décrite dans l'exemple précédent. À chaque étape la nouvelle matrice, est obtenue par une éventuelle permutation de lignes et la mise à 0 de tous les éléments situés en dessous du pivot. Une permutation de la ligne i et la ligne j s'obtient par la multiplication à gauche de A par la matrice P obtenue en permutant les lignes i et j de la la matrice identité. Quant à l'opération de mise à 0 de tous les coefficients situés en en dessous (sur la même colonne) du pivot, elle se traduit, lorsque le pivot est le coefficient (k,k) de la matrice, par la multiplication à gauche, par une matrice E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_{i,i} & = & 1 \text{ pour tout } i \in 1,..,N. \\ E_{i,k} & = & -\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} \text{ si } i > k. \\ E_{i,j} & = & 0 \text{ pour tous les autres indices.} \end{array}\right.$$

Notant E_k et P_k les matrices intervenant à l'étape k on a :

$$M = \prod_{k=1}^{n-1} (E_k P_k)$$

Donc,

$$\det(M) = \prod_{k=1}^{n-1} \det(E_k) \det(P_k) = (-1)^d,$$

où d est le nombre de permutations effectuées au cours de l'algorithme. On en déduit que M inversible. □

3.3 Méthode de décomposition LU

La méthode de décomposition LU consiste à factoriser la matrice A en un produit de deux matrices triangulaires

$$A = LU$$

où L est triangulaire inferieure (lower) et U est triangulaire superieure (upper). La résolution du système linéaire $Ax = b$ est alors ramenée à la résolution de deux systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$. Cette méthode est intéressante dans le cas où on a à résoudre plusieurs équations $Ax = b_i$ car la décomposition $A = LU$ est effectuée une fois pour toute. C'est en fait l'algorithme de l'élimination de Gauss dans le cas où on ne permute jamais. On appelle sous matrice diagonale d'ordre k de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice définie par :

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant donne une condition suffisante sur la matrice A pour qu'il n'y ait pas de permutation au cours de la méthode d'élimination de Gauss.

Théorème 15. *(factorisation LU) Soit A une matrice dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles. Il existe un unique couple de matrices (L, U), avec U triangulaire supérieure, et L triangulaire inférieure à diagonale unité tel que*

$$A = LU$$

Démonstration. Supposons qu' au cours de l'élimination de Gauss, il n'y ait pas besoin de faire de permutations. Soit A_n la matrice obtenue après la $n-1^{\text{ème}}$ étape, et E_1,E_2,...,E_{n-1} les matrices permetttant de mettre à 0 les éléments sous le pivot des matrices $A_1 = A, A_2, ..., A_{n-1}$. Alors on a :

$$A_n = E_{n-1}...E_1 A,$$

avec,

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & -\frac{a^k_{k+1,k}}{a^k_{k,k}} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -\frac{a^k_{n,k}}{a^k_{k,k}} & & & 1 \end{pmatrix}$$

et où $a^k_{i,j}$ est l'élément (i, j) de la matrice A^k. On pose $U = A_n$ et $L = (E_1)^{-1}...(E_{n-1})^{-1}$. Alors $A = LU$.

Il faut maintenant montrer que L est triangulaire inférieure. On a :

$$(E_k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & +\frac{a^k_{k+1,k}}{a^k_{k,k}} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & +\frac{a^k_{n,k}}{a^k_{k,k}} & & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(E_1)^{-1}(E_2)^{-1}...(E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a^1_{2,1}}{a^1_{1,1}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{a^1_{n,1}}{a^1_{1,1}} & \cdots & \frac{a^{n-1}_{n,1}}{a^{n-1}_{n-1,n-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie maintenant que les pivots ne s'annulent pas sous les hypothèses faites sur les Δ^k. On vérifie cela par récurrence. Le premier pivot $a_{1,1}$ est non nul car égal à Δ^1. On suppose que les pivots jusqu'à l'odre $k-1$ sont non nuls. Montrons que le pivot $a^k_{k,k}$ est non nul. Comme les $k-1$ premiers pivots sont non nuls, on a pu calculer la matrice A_k. On écrit alors l'égalité

$$(E_1)^{-1}...(E_{k-1})^{-1}A_k = A$$

sous la forme d'une égalité entre matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} L^k_{1,1} & 0 \\ L^k_{2,1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^k_{1,1} & A^k_{1,2} \\ A^k_{2,1} & A^k_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^k & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

avec $U^k_{1,1}$, $L^k_{1,1}$, et Δ^k blocs carrés de taille k, les autres blocs étant de taille $n-k$. On a alors

$$L^k_{1,1}U^k_{1,1} = \Delta^k$$

où $U^k_{1,1}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L^k_{1,1}$ une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que la matrice $U^k_{1,1} = \Delta^k(L^k_{1,1})^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles. Son déterminant est donc non nul. Or

$$\det U^k_{1,1} = \prod_{i=1}^{k} a^i_{i,i} \neq 0$$

donc le pivot $a^k_{k,k}$ à l'étape k est non nul.
Il reste à vérifier que la décomposition LU est unique. Supposons que la matrice A admette deux décompositions :

$$A = L_1U_1 = L_2U_2$$

alors

$$(L_2)^{-1}L_1 = U_2(U_1)^{-1}$$

Mais $(L_2)^{-1}L_1$ est une matrice triangulaire inférieure et $U_2(U_1)^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont donc diagonales. Et $L_2^{-1}L_1 = I$ (car leur diagonale est composée de 1). On en déduit que $U_2(U_1)^{-1} = I$. $\square$

Exercice

1. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure inversible est une matrice triangulaire inférieure.
2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

Voici l'algorithme de factorisation LU pour une matrice A de taille $n \times n$.
Algorithme de décomposition LU

Pour k allant de 1 à n
    Pour i allant de $k+1$ à n
        $a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
        Pour j allant de $k+1$ à n
            $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$
        Fin j
    Fin i
Fin k

Dans la pratique, on peut également calculer les coefficients des matrices L et U en écrivant l'égalité matricielle $A = LU$ (voir feuille de TD4).

3.4 Méthode de Cholesky

Définition 6. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$, on a*

$$< Ax, x >> 0$$

La méthode de Cholesky ne s'applique qu'aux matrices réelles symétriques définies positives. Elle consiste en une factorisation $A = BB^t$, où B est une matrice triangumaire inférieure, dans le but de ramener la résolution de l'équation linéaire $Ax = b$ à la résolution de deux équations $By = b$ et $B^t x = y$. Ceci est intéressant lorsqu'on a à résoudre plusieurs systèmes avec la même matrice et différents second membres car la décomposition est effectuée une fois pour toutes. **Exercice** Montrer que si une matrice est définie positive alors on peut lui appliquer la factorisation LU.

Correction Toute matrice définie positive est inversible. En effet :

$$Ax = 0 \Rightarrow < Ax, x >= 0 \Rightarrow x = 0$$

Et on a que Δ_k est définie positive en prenant $x_i = 0$ pour $i > k$.

Théorème 16. *Soit A une matrice réelle symétrique définie positive. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et qui vérifie :*

$$A = BB^t$$

Démonstration. Par application du théorème sur la décomposition LU, il existe un unique couple de matrices (L, U) tel que $A = LU$, où L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U est triangulaire supérieure. On note D la matrice diagonale définie par

$$D_{i,i} = (\sqrt{U_{i,i}}).$$

On peut définir cette matrice car on a, (voir la démonstration du théorème de la factorisation LU, et aussi exercice 2, TD4) pour tout $k \in \{1, .., n\}$:

$$U_{k,k} = \frac{\det(\Delta^k)}{\prod_{i=1}^{k-1} U_{i,i}} > 0.$$

On pose alors :

$$B = LD$$

et

$$C = D^{-1}U.$$

Comme $A = A^t$, on en déduit que

$$A = BC = (BC)^t = C^t B^t$$

ou encore

$$C(B^t)^{-1} = B^{-1}C^t.$$

La matrice $C(B^t)^{-1}$ est triangulaire supérieure tandis que la matrice $B^{-1}C^t$ est triangulaire inférieure. Elles sont donc toutes les deux diagonales. De plus, les éléments diagonaux de B et C sont les mêmes, donc la diagonale de $B^{-1}C^t$ n'est constituée que de 1. On en déduit que

$$C(B^t)^{-1} = B^{-1}C^t = I.$$

Donc,

$$C = B^t.$$

Il reste à montrer l'unicité de la décomposition. Supposons qu'il existe deux factorisations

$$A = B_1 B_1^t = B_2 B_2^t,$$

alors,

$$B_2^{-1}B_1 = B_2^t(B_1^t)^{-1}.$$

Il existe donc une matrice diagonale D telle que

$$B_2^{-1}B_1 = D,$$

et donc

$$B_1 = B_2 D.$$

On en déduit que

$$A = B_1B_1^t = B_2D(B_2D)^t = B_2(DD^t)B_2^t.$$

Mais,

$$A = B_2B_2^t$$

Comme B_2 est inversible, il vient,

$$D^2 = I.$$

Les coefficients de D valent donc 1 ou -1. Or les coefficients diagonaux de B_1 et B_2 sont positifs, donc de l'égalité $B_1 = B_2D$ on déduit que les coefficients diagonaux de D sont égaux à 1 et donc $B_1 = B_2$.

$\square$

Algorithme de Cholesky

Pour j allant de 1 à n

    Pour k allant de 1 à $j-1$

        $a_{jj} = a_{jj} - (a_{jk})^2$

    Fin k

    $a_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$

    Pour i allant de $j+1$ à n

        Pour k allant de 1 à $j-1$

            $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{jk}$

        Fin k

        $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$

    Fin i

Fin j

3.5 Méthode de décomposition QR

L'idée de la méthode de factorisation QR est encore de se ramener à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est triangulaire. Cependant, on ne va pas écrire une matrice A comme le produit de deux matrices triangulaires mais comme le produit d'une matrice triangulaire R et d'une matrice orthogonale unitaire Q, qui est aussi facile à inverser puisque $Q^{-1} = Q^t$. Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on effectue :

$$y = Q^t b$$

puis,

$$Rx = y$$

par remontée. Si A est inversible, l'existence d'une telle matrice orthogonale Q est donnée par le résultat suivant dont on va donner une démonstration constructive par le procédé de Gram-Schmidt.

Théorème 17. *Factorisation QR.*
Soit A une matrice réelle inversible. Il existe un unique couple (Q, R), où Q est une matrice orthogonale, et R une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs tel que

$$A = QR.$$

Avant de donner la démonstration rappelons le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt
Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt construit une base orthonormale de vecteurs à partir d'une base quelconque $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On procède comme suit, on pose :

$$q_1 = \frac{a_1}{||a_1||.}$$

Ensuite, on cherche,

$$\tilde{q_2} = a_2 + \alpha q_1$$

tel que

$$< \tilde{q_2}, q_1 >= 0.$$

Cela s'écrit :

$$< a_2, q_1 > +\alpha < q_1, q_1 >= 0.$$

On en déduit que :

$$\alpha = - < a_2, q_1 >$$

On pose ensuite

$$q_2 = \frac{\tilde{q_2}}{||\tilde{q_2}||} = \frac{a_2 - < a_2, q_1 > q_1}{||a_2 - < a_2, q_1 > q_1||}.$$

Puis, suppposant $q_1, q_2, ..., q_{i-1}$ construits, on cherche :

$$\tilde{q_i} = a_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k q_k$$

tel que pour tout $j \in 1, .., i-1$

$$< \tilde{q_i}, q_j >= 0.$$

Cela donne pour tout $j \in 1, ..i-1$,

$$< a_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k q_k, qj >= 0$$

On en déduit que

$$\alpha_j = - < a_i, q_j >$$

puis que

$$\tilde{q_i} = a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k > q_k.$$

Enfin on pose :

$$q_i = \frac{\tilde{q_i}}{||\tilde{q_i}||} = \frac{a_i + \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k > q_k}{||a_i + \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k > q_k||}$$

Démonstration du théorème de factorisation QR. Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ les n vecteurs colonnes de A. Comme ils forment une base de $\mathbb{R}^n$, on leur applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On obtient une base orthonormée $q_1, q_2, ..., q_n$, où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, le vecteur q_i est défini par :

$$q_i = \frac{a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k >}{||a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k > ||}. \tag{3.3}$$

En écrivant l'équation (3.3) sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & ... & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||\tilde{q_1}|| & 0 & ... & 0 \\ < a_2, q_1 > & ||\tilde{q_2}|| & ... & 0 \\ ... & & ... & 0 \\ < a_n, q_1 > & < a_n, q_2 > & ... & ||\tilde{q_n}|| \end{pmatrix} = A,$$

c'est à dire

$$QR = A,$$

où Q est la matrice formée des vecteurs q_i, $1 \leq i \leq n$ et R est la matrice triangulaire supérieure définie par :

$$\begin{cases} r_{k,i} = < q_k, a_i > \text{ si } 1 \leq k \leq i-1, \\ r_{i,i} = ||\tilde{q}_i|| = ||a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k > q_k||. \end{cases}$$

Pour montrer l'unicité de cette factorisation, on suppose qu'il existe deux factorisations

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2.$$

On en déduit que :

$$Q_2^t Q_1 = R_2 R_1^{-1}$$

qui est aussi triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs.
Soit $T = R_2 R_1^{-1}$. On a :

$$TT^t = (Q_2^t Q_1)(Q_2^t Q_1)^t = I.$$

Donc T est une factorisation de Cholesky de l'identité. Or cette factorisation est unique donc $T = I$. □

L2. Méthodes numériques. Université du Havre

Feuille de TD 4.

Exercice 1.

1. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure inversible est une matrice triangulaire inférieure.
2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
3. Soit A_k une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale, et telle que tous les éléments sous la diagonale soient nuls sauf ceux situés sur la colonne k. C'est à dire que :
$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & a_{k+1,k} & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & a_{n,k} & & & 1. \end{pmatrix}$$
Déterminer l'inverse de A_k. Justifier votre réponse.
4. Calculer le produit :
$$\prod_{k=1}^{n} A_k.$$

Exercice 2.
Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que son déterminant est strictement positif.

Exercice 3.
Soit A une matrice inversible. Montrer que s'il existe L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et U matrice triangulaire supérieure telles que $A = LU$ alors toutes les sous-diagonales de A sont inversibles.

Exercice 4.
En écrivant le produit
$$A = LU$$

proposer une méthode pratique de calcul des coefficients L et U. Déterminer, par cette méthode, la décomposition LU de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.
On considère la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Cette matrice est définie positive. Déterminer sa factorisation de Cholesky.

Exercice 6.
Donner la décomposition QR de la matrice suivante.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.
On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice bande de demi largeur de bande $p \in \mathbb{N}$ si $a_{i,j} = 0$ pour $|i - j| > p$. La largeur de la bande est alors $2p + 1$. Montrer que la factorisation LU conserve la strucure bande pour les matrices L et U.

Exercice 8.
Déterminer le nombre d'opérations effectuées lors des algorithmes de Gauss, LU, Cholesky et QR. On ne comptera que les multiplications et divisions (pas les additions et soustractions) et on ne donnera que le coefficient polynomial en n (n étant la taille de la matrice) de plus haut degré.

Exercice 9.
Soit A une matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$ constituée de n vecteurs colonnes $A_1, A_2, ..., A_n$. Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ la solution de l'équation
$$Ax = b.$$

1. Montrer que
$$x_i = \frac{det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)}{det(A)}. \tag{3.4}$$

2. Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $det(A)$.
3. La formule (3.4) vous semble-t-elle intéressante d'un point de vue numérique ?

Exercice 10.
On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est à diagonale dominante si elle vérifie :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.
2. En déduire que toute matrice à diagonale dominante admet une factorisation LU.
3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice quelconque, montrer que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que :

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$

Exercice 11.

1. On considère la matrice A de taille $n \times n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que cette matrice est définie positive.

2. Rappeller l'algorithme de Cholesky pour une matrice A symétrique définie positive de taille $n \times n$.
3. Déterminer le nombre de multiplications, divisions et calcul de racines carrées effectuées lors de cet algorithme.

4. En utilisant la propriété de structure bande de la matrice A, proposer une nouvelle version de l'algorithme de Cholesky pour la matrice A qui permette de réduire le nombre d'opérations effectuées.
5. Calculer le nombre d'opérations effectuées pour ce nouvel algorithme.

L2, Méthodes numériques **Université du Havre**

Feuille de TP5

1. Implémenter, dans un fichier TP5.sci, la méthode d'élimination de Gauss $x = Gauss1(A, b)$, qui renvoie la solution x de l'équation $Ax = b$. Dans un premier temps, on ne cherchera pas à implémenter les cas où les pivots s'annulent.
2. Donner la solution de l'équation
$$Ax = b$$
pour
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 11 \\ -3 & 4 & 66 & -5 & 7 \\ -4 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 56 & 78 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$.
   Dans ce cas, vérifier le résultat avec la fonction de Scilab linsolve.
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$.
3. Écrire une fonction $x = Gauss2(A, b)$ de manière à effectuer une permutation de lignes lorsque l'un des pivots est nul. Donner la solution de l'équation 1.c).
4. Écrire une fonction $x = Gauss3(A, b)$ de manière à ce que l'on soit prévenu si la matrice n'est pas inversible. Tester la fonction avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$.

L2, Méthodes numériques **Université du Havre**

Feuille de TP6

Le but de ce TP est d'implémenter la méthode de factorisation $A = LU$ ainsi que de l'appliquer pour différents calculs.

1. Proposer un algorithme permettant de calculer la factorisation LU d'une matrice.
2. Dans un fichier "TP6.sci", implémenter une fonction $FacLU(A)$ qui, à partir d'une matrice donnée A retourne une matrice, contenant L dans sa partie triangulaire inférieure et U dans sa partie triangulaire supérieure.
3. Donner la décomposition LU de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & -7 & 12 & 13 \\ 6 & 12 & -9 & 16 & 20 \\ 6 & 6 & -17 & 17 & 16 \\ -4 & -3 & 15 & -17 & -8 \end{pmatrix}.$$
4. Comment peut-on calculer le déterminant de A lorsqu'on connait la décomposition LU ? Ajouter quelques lignes à la fonction précédente pour qu'elle renvoie également le déterminant de A.
5. Implémenter une fonction $x = resoutLU(A, b)$ qui à partir d'une matrice A et d'un vecteur b renvoie la solution du système $Ax = b$.
6. Résoudre le système $Ax = b$ à l'aide de la fonction $resoutLU$, pour
$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 33 \\ -10 \\ 28 \end{pmatrix}.$$
7. Implémenter une fonction $X = ResoutLU2(A, B)$ qui à partir des données d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ et d'une matrice $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ retourne la matrice X telle que $AX = B$. Calculer X pour
$$B = \begin{pmatrix} 78 & 45 & 107 \\ 160 & 63 & 356 \\ 231 & 86 & 491 \\ 259 & 213 & 124 \\ -197 & -201 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. En déduire une fonction $C = Inverse(A)$ qui renvoie l'inverse de la matrice A.

L2. Méthodes numériques. Université du Havre

Feuille de TP7

Le but de ce TP est d'implémenter la méthode de factorisation de Cholesky, et de comparer ses performances avec la méthode de factorisation LU.

1. On rappelle que la méthode de Cholesky, donne, lorsque A est symétrique définie positive, la décomposition suivante :

$$A = BB^t \tag{3.5}$$

   où B est une matrice triangulaire inférieure. En écrivant le produit matriciel de l'équation (3.5) et en identifiant les coefficients des matrices, proposer un algorithme pour calculer la matrice B lorsque la matrice A est donnée.
2. Implémenter une fonction CHOLESKY(A) dans Scilab qui à partir d'une matrice définie positive renvoie la matrice B vérifiant l'égalité (3.5). Puis une fonction RESOUTCH(A,b) qui résout le système linéaire $Ax = b$.
3. On se propose maintenant de comparer les performances des deux décompositions LU et Cholesky. Écrire une fonction qui génère aléatoirement une matrice symétrique définie positive de taille n. Puis une fonction qui compare le temps utilisé par Scilab pour effectuer les factorisations LU et Cholesky, sur des matrices de taille $n = 10, 20, ..., 100$ (on utilisera les fonctions de Scilab, tic() et toc()). Tracer sur un même graphique les temps utilisés en fonction de la taille de la matrice.