Chapitre 4

Interpolation

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème suivant. Étant donné une fonction continue, comment peut-on l'approcher par un polynôme ? Plus précisément, on se donne une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et $n + 1$ points, $x_0, x_1, ..., x_n$ sur cet intervalle. Comment trouver un polynôme qui coïncide avec f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$?

4.1 Introduction

Théorème 1. *Soit $x_0, x_1, ..., x_n$, $n + 1$ réels distincts et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors il existe un unique polynôme P de degré au plus n qui vérifie*

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, ..., n\}.$$

Démonstration. On cherche une solution P dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, c'est à dire,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Les équations qui doivent être satisfaites sont donc :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i) \quad \forall i \in 0, ..., n. \tag{4.1}$$

Soit F l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^{n+1} & \mapsto & \mathbb{R}^{n+1} \\ (a_0,a_1,...,a_n) & \to & (\sum_{k=0}^{n} a_k(x_0)^k, \sum_{k=0}^{n} a_k(x_1)^k, ..., \sum_{k=0}^{n} a_k(x_n)^k). \end{array}$$

D'après le Théorème du rang,

$$\dim(\ker(F)) + \dim(\Im(A)) = n+1,$$

c'est à dire :

$$F \text{ injective } \Leftrightarrow F \text{ surjective } \Leftrightarrow F \text{ bijective }.$$

On va montrer que F est injective.
Soit $(b_0, b_1, ..., b_n)$, vérifiant, pour tout $i \in 0, 1, ..., n$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(x_i)^k = 0.$$

Alors le polynôme,

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

possède $n+1$ racines distinctes. D'après le Théorème fondamental de l'algèbre, on a,

$$Q(X) = 0.$$

L'application F est donc injective. On peut donner une autre preuve. L'équation (4.1) est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n. \end{pmatrix}$$

Montrons que A est inversible en calculant son déterminant. On a,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{vmatrix}.$$

En effectuant les opérations sur les colonnes de droite à gauche, $C_i \leftarrow C_i - x_0 C_{i-1}$, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & ... & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ & ... & & \\ 1 & x_n - x_0 & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport la première ligne et en utilisant la multilinéarité du déterminant, on trouve :

$$\det(A) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)...(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^{n-1} \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En réitérant l'opération, on obtient finalement :

$$\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Ce qui achève la démonstration. Le polynôme exhibé dans le Théorème 1 est appelé le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$. $\square$

4.2 Le polynôme d'interpolation de Lagrange

D'après le Théorème 1, on sait qu'étant donnés $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts, et $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$, $n+1$ réels associés, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Soit L le polynôme défini par :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Alors L est de degré au plus n et il vérifie :

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Le polynôme L est donc le polynôme d'interpolation. Écrit sous cette forme, on l'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange. Soit

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Alors, les fonctions $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Cependant cette base de polynômes n'est pas satisfaisante car l'ajout d'un point conduit à changer toutes les fonctions de la base.

4.3 Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation P qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point. Si l'on a qu'un point d'interpolation x_0 alors,

$$P(x) = f(x_0)$$

Si l'on ajoute un point x_1 alors

$$P(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0),$$

et,

$$P(x_1) = f(x_1),$$

implique,

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Si l'on a $n + 1$ points, $x_0, x_1, ..., x_n$, on cherche

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

Remarquer que si l'on a déterminé $a_0, a_1, ..., a_{i-1}$ alors de l'égalité,

$$P(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + ... + a_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1}),$$

on déduit que a_i est déterminé par la formule :

$$a_i = \frac{f(x_i) - a_0 - a_1(x_i - x_0) - ... - a_{i-1}(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-2})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})}.$$

Ce qui montre que a_i ne dépend que des points $x_0, ..., x_i$. On pose alors pour tout $k \in \{1, .., n\}$:

$$a_k = f[x_0, ..., x_k].$$

Avec cette notation, on a :

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Lemme 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $x_0, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts. Pour toute permutation σ sur $\{0, ..., n\}$, on a :*

$$f[x_0, ..., x_n] = f[x_\sigma(0), ..., x_\sigma(n)].$$

Démonstration. On pose pour tout $j \in \{0, ..., n\}$:

$$y_j = x_{\sigma(j)}.$$

On considère la décomposition de P dans les deux bases :

$$1, (x - x_0), ..., \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \text{ et } 1, x - y_0, ..., \prod_{k=0}^{n-1} (x - y_k).$$

Et,

$$(a_k)_{0 \leq k \leq n}, \quad (b_k)_{0 \leq k \leq n},$$

les coefficients de P dans ces deux bases.
Alors, le coefficient du terme x^n est a_n dans la première décomposition et b_n dans la seconde. Par unicité du polynôme d'interpolation, on en déduit que $a_n = b_n$. $\square$

Lemme 2. *On a la relation de récurrence*

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Démonstration. On pose,

$$y_j = x_{n-j}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - y_0) + ... + b_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - y_k). \end{aligned}$$

On sait déjà que $a_n = b_n$. On identifie les termes de degré $n-1$, on trouve :

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k} = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On a donc :

$$a_{n-1} - b_{n-1} = a_n(x_0 - x_n).$$

Or $a_{n-1} = f[x_0, ..., x_{n-1}]$ et $b_{n-1} = f[x_1, ..., x_n]$. D'où le résultat. □

4.4 Algorithme

Évaluation d'une fonction polynôme

Soit à évaluer le polynôme

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

au point x. On peut utiliser l'algorithme suivant :

$S = a_n$
Pour i *allant de* $n-1$ *à* 0
$S = a_i + (x - x_i)S$
Fin pour
Retourner S.

Calcul des différences divisées

Pour i *allant de* 0 *à* n
$a(i) = f(x_i)$
Fin pour
Pour i *allant de* 1 *à* n
Pour j *allant de* n *à* i
$a(j) = \frac{a(j)-a(j-1)}{x_j - x_{j-i}}$
Fin j
Fin i

4.5 Erreur d'interpolation

Soit P_n le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$. On pose :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Proposition 1. *Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$e_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \{x_0, ..., x_n\} \\ f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On suppose que $x \notin \{x_0, ., x_n\}$. Soit P_{n+1} le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_0, ..., x_n, x\}$. Alors :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) = f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

□

Théorème 2. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^k, et $x_0, ..., x_k$ des réels distincts. On pose $a = \min\{x_0, ..., x_k\}$ et $b = \max\{x_0, ..., x_k\}$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que*

$$f[x_0, ..., x_k] = \frac{f^k(\xi)}{k!}.$$

Démonstration. Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis. Supposons $k > 1$ quelconque. Soit P_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, ..., x_k$. Alors, la fonction :

$$e_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

s'annule au moins en $k + 1$ points distincts : $x_0, ..., x_k$. Donc, d'après le théorème de Rolle, la fonction $(e_k)'$ s'annule au moins en k points dans $]a, b[$. La fonction $(e_k)''$ s'annule au moins en $k - 1$ points dans $]a, b[$. De même, la fonction $(e_k)^{(k)}$ s'annule en au moins un point dans $]a, b[$. Donc :

$$\exists \xi \in]a, b[\text{ tel que } \quad (e_k)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - P_k^{(k)}(\xi) = 0.$$

Or,

$$P_k^{(k)}(\xi) = k! f[x_0, ..., x_k].$$

Donc :

$$\exists \xi \in]a, b[\text{ tel que } \quad f[x_0, ..., x_k] = \frac{f^k(\xi)}{k!}.$$

□

Théorème 3. *Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a,b]$, $x_0,...,x_n$ des réels distincts de $[a,b]$, et P_n le polynôme d'interpolation de f sur le support $x_0,...,x_n$. Alors pour tout x dans $[a,b]$ il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j).$$

Démonstration. Elle découle de la proposition et du Théorème précédents. □

4.6 Extension au cas où les points du support ne sont pas disjoints

Exercice

1. On suppose f assez régulière. Quelle est la limite de $f[x_0,x]$ lorsque x tend vers x_0 ?
2. Quelle est la limite de $f[x_0,x,x_2]$ quand x tend vers x_0 ? On définit $f[x_0,x_0,x_2]$ par cette limite.
3. Quelle est la limite de $f[x_0,x_0,x]$ lorsque x tend vers x_0 ?
4. Généraliser : montrer que de cette manière, on a,

$$f[x_0,...,x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

où dans le membre de gauche x_0 apparait $n+1$ fois.

Dans cette partie on suppose que les points du support ne sont pas nécessairement distincts. Soit α_i le nombre d'occurence du réel x_i dans le support. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie la condition suivante,

$$\forall i \in 0,...,n, \quad f \text{ admet une dérivée d'ordre } \alpha_i - 1 \text{ au point } x_i. \tag{4.2}$$

Définition 1. *Soient $x_0,x_1,...,x_n$, $n+1$ réels distincts ou non, on définit la différence divisée généralisée $f[x_0,x_1,...,x_n]$ comme suit,*

1. *si tous les x_i sont distincts, la définition a été donnée plus haut.*
2. *si tous les x_i sont égaux, on pose,*

$$f[x_0,....,x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

sinon il existe i tel que $x_i \neq x_0$, on pose alors,

$$f[x_0,....,x_n] = \frac{f[x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n] - f[x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n]}{x_i - x_0}.$$

Théorème 4. *La définition de $f[x_0, ..., x_n]$ ne dépend pas du x_i choisi. De plus, quelque soit n et quels que soient les $n+1$ points distincts ou non $x_0, ..., x_n$, quel que soit la permutation σ sur $0, ..., n$, on a*

$$f[x_0, ..., x_n] = f[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}].$$

En particulier, pour tout couple (i, j) tel que $x_i \neq x_j$,

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_0, ..., x_n, /\{x_i\} - f[x_0, ..., x_n, /\{x_j\}]}{x_j - x_i}.$$

Par ailleurs, si f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x_0, x_1, ..., x_n)$ associe $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ est continue sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Démonstration. Exercice. Cela résulte d'un passage à la limite du cas où les points du support sont deux à deux distincts. Voir également [1, 2]. □

Corollaire 1. *Supposons f de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors,*

$$F(x) = f[x_0, ..., x_{n-1}, x],$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
Si de plus f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, alors,F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$F'(x) = f[x_0, ..., x_{n-1}, x, x].$$

Démonstration. La continuité est un cas particulier du théorème 4. Si F est de classe C^{n+1}. On écrit,

$$f[x_0, ..., x_{n-1}, x, x+h] = \frac{f[x_0, ..., x_{n-1}, x+h] - f[x_0, ..., x_{n-1}, x]}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Mais,

$$f[x_0, ..., x_{n-1}, x, t],$$

est continue en t, donc,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f[x_0, ..., x_{n-1}, x, x] \text{ quand } h \to 0.$$

□

Définition 2. *On dit que le polynôme P interpole f sur le support $x_0, x_1, ..., x_n$ si,*

$$\forall i \in 0, ..., n \quad \forall l \in 0, ..., \alpha_i - 1 \quad P^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$$

Théorème 5. *Pour toute fonction f vérifiant la condition* (4.2) *, il existe un unique polynôme qui interpole f sur le support* $\{x_0, ..., x_n\}$

Démonstration. Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ l'application qui à tout vecteur $(a_0, a_1, ..., a_n)$ associe le vecteur constitué des valeurs de la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k (x_i)^k$ et de ses dérivées jusqu'à l'odre $\alpha_i - 1$, au points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Montrons que F est injective. Soit $A = (a_0, a_1, ..., a_n)$. Supposons que

$$F(A) = 0.$$

Alors si,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

on a,

$$P^{(l)}(x_i) = 0 \forall i \in 0, ..., n, \forall l \in 0, ..., \alpha_i - 1.$$

Donc,

$$P(x) = Q(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{\alpha_i},$$

or P est de degré au plus n, donc $P = 0$ et F est injective.

□

Théorème 6. *Le polynôme P défini par,*

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

interpole f sur le support $x_0, ..., x_n$.

Démonstration. Si, $x_0 = x_1 = ... = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor. Sinon, on effectue une récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n. Sans perte de généralité, on suppose que $x_0 \neq x_{n+1}$. Soit p le polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, ..., x_n, x_{n+1}\}$. On vérifie que :

$$p(x) = \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} q_n(x) + \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_0} p_n(x),$$

où q_n est le polynôme d'interpolation sur le support $x_1, ...x_{n+1}$ et p_n est le polynôme d'interpolation sur le support $x_0, ...x_n$. On en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence que le terme de degré $n + 1$ de p est égal à :

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0} (f[x_1, ..., x_{n+1}] - f[x_0, ..., x_n]) = f[x_0, ..., x_{n+1}]$$

Soit :

$$R(x) = p(x) - f[x_0, ..., x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Alors $R(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par ailleurs, $R(x)$ interpole f sur le support, $\{x_0, ..., x_n\}$ car $\phi(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ vérifie,

$$\phi^{(l)}(x_i) = 0 \text{ pour tout } l \in 0, ..., \alpha_i - 1.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$R(x) = f[x_0] + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}),$$

donc,

$$p(x) = f[x_0]+...+f[x_0, x_1, ..., x_n](x-x_0)...(x-x_{n-1})+f[x_0, ..., x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n).$$

□

Bibliographie

[1] J. Bastien and J.N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Dunod, 2003.

[2] J.S. Conte and C. D. Boor. *Numerical analysis. An algorithmic approach.* Springer, 1980.

L2, Méthodes numériques 2. Université du Havre

Feuille de TD1

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(1) = 1,\ f(2) = 8,\ f(3) = 27, f(4) = 64.$$

Que vaut $P_3(x)$, le polynôme d'interpolation de f de degré 3 sur le support $\{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4\}$? Écrire sa forme de Lagrange puis sa forme de Newton.

Exercice 2.
Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, $n+1$ réels distincts, et $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$ la base des polynômes de Lagrange. Vérifier que les Φ_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3.
Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, $n+1$ réels distincts. On considère la matrice suivante (matrice de Vandermonde) :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que D_n est inversible.
2. Soit $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$ la base des polynômes de Lagrange. On suppose que pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, on a :

   $$\phi_i(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x^j.$$

   Soit α la matrice de taille $(n+1)\times(n+1)$ définie par :

   $$\alpha = (\alpha_{ij})_{0\leq i,j\leq n}.$$

   Déterminer une relation entre D_n et α.
3. Expliciter D_n^{-1} dans le cas $n = 2$.

Exercice 4.

1. Montrer que

$$f[x_0] = \frac{\det(f(x_0))}{\det(1)},$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}},$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}$$

2. Généraliser. On pourra utiliser les formules de Cramer.

L2, Méthodes numériques 2. Université du Havre

Feuille de TP1

Le but de ce TP est de calculer numériquement le polynôme d'interpolation de Newton et de le tester sur quelques exemples.

1. Écrire une fonction scilab, *A=diffdiv(X,Y)* qui renvoie le vecteurs des différences divisées à partir des données X et Y correspondants aux points d'interpolation $x_0, ..., x_n$ et aux valeurs de f en ces points $f(x_0), ..., f(x_n)$.
2. Écrire une fonction scilab *z=evhornersca(x,X,A)* qui renvoie la valeur du polynôme
$$\sum_{i=0}^{n} A(i+1) \prod_{k=1}^{i} (x - X(k))$$
au point x.
3. Écrire une fonction scilab *z=evhorner(x,X,A)*, similaire à la précédente mais qui est à valeurs vectorielles. C'est à dire que cette fois le paramétre x est un vecteur.
4. A l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction *InterpNewton(n)*, permettant de représenter sur un graphique une fonction f sur l'intervalle $[-5, 5]$ ainsi que son polynôme d'interpolation de Newton de degré n. On prendra des points d'interpolation équirépartis sur l'intervalle $[-5, 5]$. Et on fera ce travail pour les fonctions particulières suivantes :
   (a) $f(x) = \ln(6 + x)$
   (b) $f(x) = \exp(x)$.
5. Reprendre la question précédente avec la fonction
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$
Que constate-t-on ?
6. Reprendre maintenant la question précédente avec les points d'interpolation suivants :
$$(-5\cos(\frac{i\pi}{n}))_{0 \leq i \leq n}$$
Que constate-t-on ?