Chapitre 5

Intégration numérique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'interesse au calcul numérique d'intégrales. Plus précisément, on considère une fonction f continue et une fonction w continue et positive sur un intervalle compact $[a, b]$. On cherche à évaluer numériquement la quantité :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx.$$

5.2 Formules de quadrature et interpolation

D'une manière générale une formule de quadrature est une formule de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{5.1}$$

Définition 1. *On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre m, si m est le plus grand entier tel que la formule soit exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus m.*

Soient $n+1$ réels deux à deux distincts $(x_j)_{0\leq j\leq n}$. Cherchons les relations que doivent vérifier les scalaires λ_j pour que la formule de quadrature (5.1) soit d'ordre m. On doit avoir pour tout monôme x^k les relations suivantes :

$$\forall k \in \{0, ..., m\}, \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j^k = \int_a^b x^k w(x)dx \tag{5.2}$$

Le système (5.2) est un système de $n+1$ inconnues à $m+1$ équations. Son écriture matricielle est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^m & x_1^m & ... & x_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b w(x)dx \\ \int_a^b xw(x)dx \\ ... \\ \int_a^b x^m w(x)dx \end{pmatrix}.$$

Si $m > n$, l'existence d'une solution n'est pas assurée. On suppose donc que $m \leq n$. Pour $n = m$, on reconnait la matrice de Vandermonde qui est inversible. Sinon, on peut fixer $n-m$ valeurs pour les $\lambda_j, n+1 \leq j \leq n$, et se ramener au cas d'une matrice carrée. Donc, $m \leq n$, l'équation (5.2) admet une solution, quelque soit le second membre. Soit $(\Phi_p)_{0\leq p\leq m}$ la base des polynômes de Lagrange sur le support $x_0, x_1, ..., x_m$. Alors on a,

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \Phi_p(x_j) = \int_a^b w(x)\Phi_p(x)dx,$$

ce qui implique,

$$\forall p \in 0, ..., m, \quad \lambda_p + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \Phi_p(x_j) = \int_a^b w(x)\Phi_p(x)dx.$$

c'est à dire,

$$\lambda_p = \int_a^b w(x)\Phi_p(x)dx - \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \Phi_p(x_j)$$

Dans le cas où $m = n$, le système (5.2) admet une unique solution :

$$\lambda_p = \int_a^b w(x)\Phi_p(x)dx.$$

La formule de quadrature donne alors pour l'intégrale approchée $I_n(f)$:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{j=0}^{n} (\int_a^b \Phi_j(x)w(x)dx) f(x_j) \\ &= \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\Phi_j(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b P(x)w(x)dx \end{aligned}$$

où P est le polynôme d'interpolation de f aux points x_j. Dans ce cas la formule de quadrature peut être interprétée comme suit : on interpole f par P aux noeuds $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ (par le polynôme d'interpolation de degré n) et on approche l'intégrale de f par celle de P.

5.3 Estimation d'erreur

5.3.1 Cas général

On rappelle les résultats suivants démontrés dans le paragraphe précédent. Si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, alors pour ensemble $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ d'éléments de $[a,b]$, l'application,

$$\begin{array}{rcl} F : [a,b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f[x_0, x_1, ..., x_n, x] \end{array}$$

est continue sur $[a,b]$. Si de plus f est de classe C^{n+2}, l'application F est dérivable sur $[a,b]$, et pour tout réel x,

$$F'(x) = f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x].$$

Par ailleurs, si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, alors on a :

$$\forall x \in [a,b], \quad e_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, ..., x_n, x](\prod_{k=0}^{n}(x - x_k))$$

et pour tout réel x de $[a,b]$ il existe $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$f[x_0, ..., x_n, x] = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Définition 2. *Soit $x_0, ..., x_n$ un ensemble de points de l'intervalle $[a,b]$. On appelle intégrale approchée de f sur $[a,b]$ par rapport au support $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, et on note $I_n(f)$ la quantité,*

$$I_n(f) = \int_a^b P_n(x)w(x)dx,$$

où P_n le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$. Sous ces notations, on appelle erreur d'intégration et on note E_n la quantité,

$$E_n = \int_a^b f(x)w(x)dx - I_n(f).$$

On pose,

$$\Psi_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

D'après les rappels précédents, on a :

$$E_n = \int_a^b f[x_0, ..., x_n, x]\Psi_n(x)\omega(x)dx.$$

Proposition 1. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ alors*

1. *si Ψ_n est de signe constant sur $[a, b]$, l'erreur s'écrit*

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \Psi_n(x)w(x)dx$$

   avec $\xi \in [a, b]$.

2. *si Ψ_n n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, et si la condition suivante a lieu*

$$\int_a^b \Psi_n(x)w(x)dx = 0$$

   pour x_{n+1} quelconque dans $[a, b]$, l'erreur s'écrit

$$E_n = \int_a^b f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x]\Psi_{n+1}(x)w(x)dx$$

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin du Théorème de la moyenne généralisée.

Théorème 1 (Théorème de la moyenne généralisée)**.** *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, a, b, f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et g de signe constant sur $[a, b]$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b fg dx = f(\xi) \int_a^b g dx$$

Démonstration. Pour $g(x) = 1$, il s'agit du Théorème de la moyenne,

$$\exists \xi \in]a, b[\text{ tel que } \int_a^b f dx = (b-a)f(\xi).$$

Dans le cas général, on effectue le changement de variable,

$$u = a + \frac{(b-a)}{G(b)} G(x),$$

où ,

$$G(x) = \int_a^x g(y)dy.$$

□

Nous aurons également besoin du lemme suivant,

Lemme 1. *Soit x_{n+1} un point supplémentaire x_{n+1} de $[a, b]$, alors on a*

$$f[x_0, ..., x_n, x] = f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}) + f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}]$$

Démonstration.

$$f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x] = f[x, x_0, ..., x_n, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}] - f[x, x_0, ..., x_n]}{x_{n+1} - x}$$

□

On peut maintenant démontrer la proposition (1).

Preuve de la proposiotion (1). Si $\Psi_n(x)$ est de signe constant, on a,

$$\begin{aligned} E_n &= \int_a^b f[x_0, ..., x_n, x]\Psi_n(x)w(x)dx \\ &= f[x_0, ..., x_n, \xi] \int_a^b \Psi_n(x)w(x)dx \text{ (d'après le Théorème de la moyenne)} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \text{ pour un autre } \xi, \end{aligned}$$

ce qui montre la premiére partie de la proposition. Dans le cas, où $\int_a^b \Psi_n w(x)dx = 0$, on applique le lemme (1),

$$\begin{aligned} E_n &= \int_a^b f[x_0, ..., x_n]\Psi_n(x)\omega(x)dx \\ &= \int_a^b (f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}) + f[x_0, ..., x_n, x_{n+1})\Psi_n(x)\omega(x)dx \\ &= \int_a^b (f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x]\Psi_{n+1}(x)\omega(x)dx \end{aligned}$$

□

On en déduit immédiatement le corrolaire suivant,

Corollaire 1. *On suppose que f est de classe C^{n+2} et que,*

$$\int_a^b \Psi_n(x)dx = 0,$$

alors,

1. *si Ψ_{n+1} est de signe constant sur $[a,b]$, l'erreur s'écrit*

$$E_n = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \Psi_{n+1}(x) w(x) dx$$

avec $\xi \in [a,b]$

2. *si Ψ_n n'est pas de signe constant sur $[a,b]$, et si la condition suivante a lieu,*

$$\int_a^b \Psi_{n+1}(x) w(x) dx = 0,$$

pour x_{n+2} quelconque dans $[a,b]$, l'erreur s'écrit

$$E_n = \int_a^b f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x] \Psi_{n+2}(x) w(x) dx$$

En itérant le procédé, on obtient :

Corollaire 2. *On suppose que*

$$\forall i \in \{n, ..., 2n\} \int_a^b \Psi_i(x) w(x) dx = 0$$

où $(x_i)_{n+1 \leq i \leq 2n+1}$ sont des points quelquonques de $[a,b]$. Alors l'erreur d'intégration s'écrit :

$$E_n = \int_a^b f[x_0, ..., x_{2n+1}, x] \Psi_{2n+1}(x) \omega(x) dx.$$

Si on suppose de plus que que f est de classe C^{2n+2} et que Ψ_{2n+1} est de signe constant sur $[a,b]$, l'erreur s'écrit

$$E_n = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \Psi_{n+1}(x) w(x) dx$$

avec $\xi \in [a,b]$.

5.3.2 Application aux formules classiques

Dans ce cas, on a $w(x) = 1$.

Interpolation par un polynôme de degré 0

Exercice Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose le support réduit à un seul point $x_0 = a$.

1. Calculer la valeur de l'intégrale sur $[a, b]$ du polynôme d'interpolation de f de degré 0 sur le support $x_0 = a$.
2. Quelle est l'erreur commise par rapport à l'intégrale exacte ?
3. Donner une estimation de l'erreur qui fasse intervenir la dérivée.

Cet exercice conduit au corollaire suivant,

Corollaire 3 (Méthode du rectangle)**.** *On approche la fonction f par $f(a)$. Alors la valeur approchée obtenue pour l'intégrale est :*

$$I_R = (b - a)f(a)$$

et l'erreur vaut

$$E_R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi) \text{ avec } \xi \in]a, b[$$

Démonstration. Dans le cas général où on approche $f(x)$ par $f(x_0)$, on obtient pour la valeur approchée de l'intégrale,

$$I_0 = (b - a)f(x_0)$$

et pour l'erreur d'intégration,

$$E_0 = \int_a^b f[x_0, x](x - x_0)dx.$$

Lors que $x = a$, $\phi_0(x)$ est de signe constant, et on a donc,

$$E_R = \int_a^b f[a, x](x - a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi) \text{ avec } \xi \in]a, b[.$$

□

Exercice Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose le support réduit à un seul point x_0.

1. Calculer la valeur de l'intégrale sur $[a, b]$ du polynôme d'interpolation de f de degré 0 sur le support $x_0 = \frac{a+b}{2}$.
2. Quelle est l'erreur commise par rapport l'intégrale exacte.
3. Donner une estimation de l'erreur qui fasse intervenir la seconde de f.

En choisissant pour x_0 le point milieu il vient :

Corollaire 4 (Méthode du point milieu)**.** *On approche la fonction f par $f(\frac{a+b}{2})$. Alors la valeur approchée obtenue pour l'intégrale est :*

$$I_M = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

et si f est de classe C^2 sur $[a,b]$ alors l'erreur d'intégration vaut,

$$E_M = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi) \text{ avec } \xi \in]a,b[.$$

Démonstration. Soit,

$$m = \frac{b+a}{2},$$

alors,

$$E_M = \int_a^b f[m,x](x-m)dx.$$

Mais

$$\int_a^b (x-m)dx = 0,$$

on a donc d'après la seconde partie de la proposition 1, pour x_1 quelconque dans $[a,b]$:

$$E_M = \int_a^b f[m,x_1,x](x-x_m)(x-x_1)dx$$

En choisissant $x_1 = m$, on obtient :

$$E_M = \int_a^b f[m,m,x](x-x_m)^2dx$$

et donc d'après le corollaire 1, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$E_M = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-m)^2dx$$

□

Interpolation par un polynôme de degré 1

Proposition 2. *On suppose le support d'interpolation possède deux points x_0, x_1. Si f est de classe C^2 sur $[a,b]$, la valeur approchée est :*

$$I_1 = \int_a^b (f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0))dx$$

et l'erreur d'integration est

$$E_1 = \int_a^b f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1)dx$$

Démonstration. Découle de l'écriture de l'erreur d'interpolation pour le polynôme. □

Corollaire 5 (Méthode du trapèze)**.** *Si f est de classe C^2 sur $[a,b]$ alors pour $x_0 = a, x_1 = b$, la valeur approchée vaut*

$$I_T = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

et l'erreur vaut

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \text{ avec } \xi \in]a,b[.$$

Démonstration. On a :

$$I_T = \int_a^b f[a]dx + \int_a^b f[a,b](x-a)dx = (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2}$$

et,

$$E_T = \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx.$$

Ici, $\Phi_1(x) = (x-a)(x-b)$ garde un signe constant sur $[a,b]$. On est dans le cas 1 de la proposition 1. Donc,

$$E_T = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \text{ avec } \xi \in]a,b[.$$

□

Interpolation par un polynôme de degré 2

Proposition 3. *On suppose le support d'interpolation possède trois points x_0, x_1, x_2. Si f est de classe C^3 sur $[a, b]$, la valeur approchée est :*

$$I_2 = \int_a^b (f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1))dx$$

et l'erreur d'intégration est

$$E_2 = \int_a^b f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx$$

Démonstration. Idem que pour les propositions précédentes. □

Corollaire 6 (Méthode de Simpson)**.** *Si f est de classe C^4 sur $[a, b]$ alors pour $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = \frac{a+b}{2}$, la valeur approchée vaut*

$$I_S = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b)) \text{ où } m = \frac{a+b}{2}$$

et l'erreur vaut

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \text{ avec } \xi \in]a, b[.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} I_S &= \int_a^b f[a]dx + \int_a^b f[a, b](x - a)dx + \int_a^b f[a, b, m](x - a)(x - b)dx \\ &= (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b f[a, b, m](x - a)(x - b)dx \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f[a, b, m] = f[a, m, b] &= \frac{1}{b-a}((\frac{f(b) - f(m)}{b - m}) - (\frac{f(m) - f(a)}{m - a})) \\ &= \frac{2(f(a) - 2f(m) + f(b))}{(b - a)^2} \end{aligned}$$

et,

$$\int_a^b (x - a)(x - b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

On en déduit le résultat par calcul. Pour l'erreur d'intégration ;

$$E_S = \int_a^b f[a, b, m, x](x - a)(x - b)(x - m)dx.$$

Ici, $\int_a^b \Phi_2(x) = \int_a^b (x-a)(x-b)(x-m)dx = 0$. On est dans le cas 2 dela proposition 1. On a donc,

$$E_S = \int_a^b f[a,b,m,m,x](x-a)(x-b)(x-m)^2 dx.$$

Alors $\Phi_3(x) = (x-a)(x-b)(x-m)^2$ est de signe constant sur $[a,b]$, donc

$$E_S = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_a^b (x-a)(x-b)dx \text{ avec } \xi \in]a,b[.$$

D'où le résultat par calcul. □

Remarque 1. *Bien que construite sur un support de trois points, la méthode de Simpson est exacte sur les polynômes de degré inférieur ou égal é* 3.

Exercice
Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 (3x^4 + 2x^3 + 2x + 5)dx$. Calculer l'approximation donnée par la méthode de Simpson, ainsi que l'erreur commise lorsquec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

5.3.3 Formules classiques et estimation d'erreur

Formule composée des rectangles
La formule des rectangles consiste à approcher l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

par

$$I_{R,N} = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Formule composée du point milieu
La formule du point milieu consiste à approcher l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

par

$$I_{M,N} = \sum_{i=0}^{N-1} f(\frac{(x_{i+1} + x_i)}{2})(x_{i+1} - x_i).$$

Formule composée des trapèzes
La formule des trapèzes consiste à approcher l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

par

$$I_{T,N} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i).$$

Formule composée de Simpson
La formule de Simpson consiste à approcher l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

par

$$I_{T,N} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{6}(f(x_i)+4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1}))(x_{i+1}-x_i).$$

Proposition 4 (Estimation d'erreur pour la formule composée des rectangles)**.** *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. On suppose qu'on a une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$, avec $x_0 = a, x_1 = a+h, ..., x_N = b = a+Nh$ (on a donc $h = \frac{b-a}{N}$). Si on approche*

$$\int_a^b f(x)dx$$

par

$$I_{R,N} = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i),$$

alors,

$$E_{R,N} = \int_a^b f(x)dx - I_{R,N} = h\frac{(b-a)}{2}f'(\xi) \textit{ avec } \xi \in]a,b[$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E_{R,N} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} f'(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[\\ &= \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{N-1} f'(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[\end{aligned}$$

or puisque f est C^1, on a :

$$m \leq f'(x) \leq M,$$

donc,

$$m\frac{h^2}{2} \leq f'(x)\frac{h^2}{2} \leq M\frac{h^2}{2}$$

On a donc pour tout $i \in \{0, ..., N-1\}$,

$$m\frac{h^2}{2} \leq f'(\xi_i)\frac{h^2}{2} \leq M\frac{h^2}{2}.$$

Soit en sommant pour i allant de 0 à $N-1$:

$$m\frac{Nh^2}{2} \leq E_{R,N} \leq M\frac{Nh^2}{2},$$

ou encore :

$$m \leq \frac{E_{R,N}}{\frac{Nh^2}{2}} \leq M,$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$f'(\xi) = \frac{E_{R,N}}{\frac{Nh^2}{2}}.$$

Donc,

$$E_{R,N} = \frac{(b-a)h}{2}f'(\xi)$$

□

Lemme 2. *Soit f une fonction de classe C^k sur $[a,b]$ et α un réel positif. Si pour tout $i \in \{0,..,N-1\}$*

$$E_{i,N} = \alpha h^{k+1} f^{(k)}(\xi_i) \textit{ avec } \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$$

alors

$$E_N = \sum_{i=0}^{N-1} E_{i,N} = \alpha(b-a)h^k f^{(k)}(\xi) \textit{ avec } \xi \in [a,b].$$

Démonstration.

$$E_{i,N} \quad = \quad \alpha h^{k+1} f^{(k)}(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[,$$

or puisque f est de classe C^k, on a :

$$m \leq f^{(k)}(x) \leq M,$$

on a donc,

$$Nm\alpha h^{k+1} \leq E_N \leq NM\alpha h^{k+1}.$$

Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{E_N}{N\alpha h^{k+1}}.$$

Donc,

$$E_N = \alpha(b-a)h^k f^{(k)}(\xi).$$

□

On en déduit la proposition suivante,

Proposition 5. *Soit f de classe C^2 (resp. C^2,C^4) sur $[a,b]$, alors l'erreur pour la formule composée du point milieu (resp. des trapèzes, Simpson) est donnée par :*

$$E_{M,N} = h^2 \frac{b-a}{24} f''(\xi)$$

$$(E_{T,N} = -h^2 \frac{b-a}{12} f''(\xi))$$

$$(E_{S,N} = -h^4 \frac{b-a}{2880} f^{(4)}(\xi))$$

5.4 Intégration de Gauss-Legendre

5.4.1 Les polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la formule de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x),$$

avec,

$$L_0(x) = 1 \text{ et } L_1(x) = x.$$

Théorème 2. *Les polynômes de Legendre vérifient les propriétés suivantes :*

1.
$$\forall i < n, \quad \int_{-1}^{1} L_n(x) x^i dx = 0$$

2. *$L_n(x)$ posséde n racines réelles distinctes sur $]-1,1[$.*

Démonstration. Nous admettrons la premiére partie du Théorème mais démontrerons la seconde. Le polynôme $L_n(x)$ est de degré n, il admet donc au plus n racines réelles. Notons $z_1, z_2, .., z_k$, $(k \leq n)$ les racines de L_n dans $]-1,1[$ comptées sans répétitions et qui provoquent un changement de signe pour L_n. Nous allons montrer que $k = n$. Supposons $k < n$. Soit

$$q(x) = \prod_{i=0}^{k}(x - z_i)$$

Alors, q et L_n sont soit de méme signe, soit de signe contraire, donc :

$$\int_{-1}^{1} L_n q dx \neq 0$$

Ce qui est une contradiction d'après le 1) du théorème. □

5.4.2 Intégration de Gauss-Legendre

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, on cherche à calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

La méthode d'intégration de Gauss-Legendre consiste à approcher l'intégrale I par l'intégrale,

$$I_n = \int_{-1}^{1} p_n(x)dx,$$

où $p_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de la fonction f sur le support $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ constitué des racines du $n + 1$ ème polynôme de Legendre $L_{n+1}(x)$.

Théorème 3. *Supposons f de classe C^{2n+2} sur $[-1, 1]$. Soit $E_n = I - I_n$ alors il existe $\xi \in]-1, 1[$ et une constante réelle α tels que*

$$E_n = \alpha \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!}.$$

Démonstration. On pose,

$$x_{n+1} = x_0, x_{n+2} = x_1, ..., x_{2n+1} = x_n,$$

et pour tout $i \in \{n, 2n + 1\}$,

$$\Psi_i = \prod_{k=0}^{i}(x - x_k).$$

Alors, il existe α tel que :

$$L_{n+1}(x) = \alpha \Psi_n(x)$$

On a donc

$$\int_{-1}^{1} \Psi_n(x) x^i dx = 0 \; \forall i \in \{0, ..., n\},$$

ceci implique que,

$$\int_{-1}^{1} \Psi_i(x) dx = 0 \; \forall i \in \{n, ..., 2n\}$$

car $\Psi_i(x) = \Psi_n(x) g(x)$ où $g(x)$ est un polynôme de degré $i - n$, et que,

$$\Psi_{2n+1} = (\Psi_n)^2$$

est de signe constant sur $[-1, 1]$. Donc par application du corollaire 2 il existe $\xi \in]-1, 1[$ et β tels que,

$$E_n = \beta \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

□

Lemme 3. *La formule d'intégration de Gauss-Legendre peut s'écrire*

$$I_n = \int_{-1}^{1} p_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$*, on a :*

$$\lambda_i = \frac{2}{(n+1) L'_{n+1}(x_i) L_n(x_i)}$$

les $(x_i)_{0 \le i \le n}$ *étant les racines de* $L_{n+1}(x)$.

Méthodes numériques 2. Université du Havre

Feuille de TP2

Le but de ce TP est d'implémenter quelques méthodes permettant de calculer des intégrales de fonctions continues sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Méthodes d'intégration classiques

1. Écrire une fonction Scilab *[Ia]=ICl(c,h,a,b,f)* qui renvoie la valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$. Ici, $c \in \{1, 2, 3, 4\}$ est un paramètre indiquant la méthode d'intégration à utiliser :
   - si $c = 1$, on utilise la méthode des rectangles,
   - si $c = 2$, on utilise la méthode du point milieu,
   - si $c = 3$, on utilise la méthode des trapèzes,
   - si $c = 4$, on utilise la méthode de Simpson.

   h est un paramètre donnant l'espacement entre deux points consécutifs de la subdivision $a_0 = a, ..., a_n = b$.
2. Calculer, d'abord analytiquement, puis numériquement la valeur des intégrales suivantes :
$$\int_0^1 \cos(x)dx, \int_0^1 \exp(x)dx, \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$
   On effectuera plusieurs tests pour différentes valeurs de h, et ce pour chaque méthode.

Méthodes d'intégration de Gauss-Legendre

Cette méthode d'intégration consiste à construire un support d'interpolation $\{x_0, ..., x_n\}$, des points $x_{n+1} = x_0, x_{n+2} = x_1, ..., x_{2n+1} = x_n$ et des fonctions

$$\Psi_j = \prod_{k=0}^{j}(x - x_k)_{n \le j \le 2n},$$

telles que l'on ait :

$$\int_{-1}^{1} \Psi_j(x)dx = 0 \text{ pour } n \le j \le 2n.$$

Pour cela :

– on construit les polynômes de Legendre par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$$

avec les termes initiaux

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x.$$

– Les x_i sont alors les $n+1$ zéros de $L_{n+1}(x)$.
– On définit pour tout i dans $\{0, .., n\}$,

$$W_i = \frac{2}{(n+1)L'_{n+1}(x_i)L_n(x_i)}.$$

– La formule de quadrature est alors

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i).$$

1. Écrire une fonction Scilab *[P]=CPGL(n)* qui renvoie un tableau contenant les $(n+2)$ premiers polynômes de Legendre : $L_0(x), L_1(x)..., L_{n+1}(x)$. On pourra pour cela utiliser la fonction scilab *poly*.
2. Représenter graphiquement les polynômes L_n pour quelques valeurs de n. On pourra pour cela utiliser la fonction scilab *horner*. À l'aide des graphiques, pouvez-vous dire combien de racines distinctes possède le polynôme L_n ?
3. Écrire une fonction Scilab *[Points,Poids]=PPGL(n)* qui renvoie la valeurs des points du support et les poids pour la méthode de Gauss-Legendre à $n+1$ points. Pour la dérivation, on pourra utiliser la fonction scilab *derivat*.
4. Écrire une fonction Scilab *Iapp=IGL(n,f)* qui calcule la valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ par la méthode Gauss-Legendre à $n+1$ points. Calculer numériquement, grâce à cette fonction les valeurs de :

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)dx,\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \text{et}\ \int_{-1}^{1} \exp(x)dx.$$

Vérifier vos résultats en calculant analytiquement les intégrales précédentes. Caluler numériquement

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x)\cos(x^2)}{1+x^4}dx.$$

Comparer le résultat avec la valeur fournie par la fonction *ICl*.

5. Montrer que

$$\int_a^b f(y)dy = (\frac{b-a}{2})\int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2})dx$$

En déduire l'écriture d'une fonction *Iapp=IGL(a,b,n,f)* qui calcule la valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la méthode de Gauss-Legendre à $n+1$ points. Calculer numériquement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx \text{ puis } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(x)\cos(x^2)}{1+x^4}dx.$$