Feuille de TD 4.

Exercice 1.

1. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure inversible est une matrice triangulaire inférieure.
2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
3. Soit A_k une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale, et telle que tous les éléments sous la diagonale soient nuls sauf ceux situés sur la colonne k. C'est à dire que :

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & a_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & a_{n,k} & & & 1. \end{pmatrix}$$

   Déterminer l'inverse de A_k. Justifier votre réponse.
4. Calculer le produit :

$$\prod_{k=1}^{n} A_k.$$

Exercice 2.
Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que son déterminant est strictement positif.

Exercice 3.
Soit A une matrice inversible. Montrer que s'il existe L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et U matrice triangulaire supérieure telles que $A = LU$ alors toutes les sous-diagonales de A sont inversibles.

Exercice 4.
En écrivant le produit

$$A = LU$$

proposer une méthode pratique de calcul des coefficients L et U. Déterminer, par cette méthode, la décomposition LU de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.
On considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est définie positive. Déterminer sa factorisation de Cholesky.

Exercice 6.
Donner la décomposition QR de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.
On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice bande de demi largeur de bande $p \in \mathbb{N}$ si $a_{i,j} = 0$ pour $|i-j| > p$. La largeur de la bande est alors $2p+1$. Montrer que la factorisation LU conserve la strucure bande pour les matrices L et U.

Exercice 8.
Déterminer le nombre d'opérations effectuées lors des algorithmes de Gauss, LU, Cholesky et QR. On ne comptera que les multiplications et divisions (pas les additions et soustractions) et on ne donnera que le coefficient polynomial en n (n étant la taille de la matrice) de plus haut degré.

Exercice 9.
Soit A une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ constituée de n vecteurs colonnes $A_1, A_2, ..., A_n$. Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ la solution de l'équation
$$Ax = b.$$

1. Montrer que
$$x_i = \frac{det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)}{det(A)}. \tag{1}$$
2. Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $det(A)$.
3. La formule (1) vous semble-t-elle intéressante d'un point de vue numérique ?

Exercice 10.
On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est à diagonale dominante si elle vérifie :
$$\forall i \in \{1, ..., n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.
2. En déduire que toute matrice à diagonale dominante admet une factorisation LU.
3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice quelconque, montrer que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que :
$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$

Exercice 11.

1. On considère la matrice A de taille $n \times n$ suivante :
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que cette matrice est définie positive.

2. Rappeller l'algorithme de Cholesky pour une matrice A symétrique définie positive de taille $n \times n$.
3. Déterminer le nombre de multiplications, divisions et calcul de racines carrées effectuées lors de cet algorithme.
4. En utilisant la propriété de structure bande de la matrice A, proposer une nouvelle version de l'algorithme de Cholesky pour la matrice A qui permette de réduire le nombre d'opérations effectuées.
5. Calculer le nombre d'opérations effectuées pour ce nouvel algorithme.