Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Mathématiques
(3ème Année)- Topologie

Examen - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

28 juin 2016

Exercice 1. Questions de cours

1. Donner la définition d'un espace topologique.
2. Donner la définition d'une distance et d'un espace métrique.
3. Un espace métrique est-il un espace topologique ? Justifier votre réponse.
4. Donner la définition d'une suite de Cauchy.
5. Donner la définition d'un espace métrique complet.
6. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $x \in X$. Montrer que l'application :
$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x, z) \end{aligned}$$
est continue.
7. Donner la définition d'un espace topologique compact.
8. Énoncer et démontrer un théorème sur l'image d'un espace topologique compact par une application continue.

Exercice 2. On note $E = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$. On admet que pour toute matrice A de E il existe une constante C telle que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$||Ax|| \leq C||x||,$$

où $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On définit sur $E \times E$ la quantité d par :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & d(A, B) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \dfrac{||Ax - Bx||}{||x||} \end{array}$$

1. On rappelle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

   Montrer que d est une distance sur E.
2. On admet que

$$d(A, B) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n ; ||x|| = 1} ||Ax - Bx|| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n ; ||x|| \leq 1} ||Ax - Bx||.$$

   On souhaite maintenant montrer que (E, d) est complet. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x|| = 1$, $(A_p x)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x|| = 1$, il existe $y(x) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{p \to +\infty} A_p x = y(x).$$

4. Soit A la matrice définie par :

$$A_{.i} = \lim_{p \to +\infty} A_p e_i,$$

   où e_i est le $i$ème vecteur de la base canonique, et $A_{.i}$ la $i$ème colonne de A. Montrer que $y(x) = Ax$.
5. En déduire que E est complet.
6. On souhaite maintenant montrer que pour $A \in E$, on peut définir $\exp A$ par la formule :

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

   On rappelle que pour tout réel a, on a :

$$\exp a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{a^k}{k!}$$

   Montrer que la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$ est une suite de Cauchy de E.

7. Conclure.

Exercice 3.

1. Soit X un espace topologique, et Y un espace métrique. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $C(X, Y)$. Rappeler la définition de l'équicontinuité sur X pour l'ensemble $\mathcal{H}$.
2. Enoncer le théorème d'Ascoli.
3. On cherche maintenant à montrer le résultat suivant. Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si $u_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe $T > 0$ et une fonction continue qui vérifie $u(0) = u_0$ et
$$\forall t \in [0, T]\, u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds. \tag{1}$$
Soit $T > 0$ fixé, pour tout h vérifiant $0 < h < T$, on définit une fonction affine par morceaux u_h de la manière suivante :
$$u^h(t) = u_0 + f(u_0)t \text{ si } t \in [0, h],$$
$$u^h(t) = u^h(h) + f(u^h(h))(t - h) \text{ si } t \in [h, 2h],$$
$$...$$
$$u^h(t) = u^h(ih) + f(u^h(ih))(t - ih) \text{ si } t \in [ih, (i+1)h], i \in \{0, ..., N-1\}$$
$$u^h(t) = u^h(Nh) + f(u^h(Nh))(t - Nh) \text{ si } t \in [Nh, T]$$
où N est la partie entière de $\frac{T}{h}$. On admet qu'on a pu choisir T de sorte qu'il existe une constante M telle que $\forall h \in [0, T]$, $\forall t \in [0, T]$
$$u_h(t) \leq M.$$
On pose $X = [0, T]$, $Y = \mathbb{R}$, munis de la distance usuelle. Soit $\mathcal{H} = \{u_h; h \in]0, T]\}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est équicontinue.
4. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $\mathcal{H}(t) = \{u^h(t); h \in]0, T]\}$ est une partie relativement compacte de $\mathbb{R}$.
5. En déduire qu'il existe une suite $(u^{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $h_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ et une fonction continue u de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$, telle que la suite $(u^{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u.
6. Montrer que u vérifie l'équation (1).